МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

В.В. Тишин

Дискретная математика в примерах и задачах

Электронное учебное пособие

САМАРА
2007

Автор: ТИШИН Владимир Викторович

Дискретная математика – одно из самых динамично развивающихся направлений современной математики, и тотальная компьютеризация всех областей нашей жизни приводит к постоянному росту спроса, как на программистов, так и на специалистов, разрабатывающих математические основы компьютерных технологий.

Важным моментом усвоения математики и овладения её методами является самостоятельная работа учащегося. Система индивидуальных заданий активизирует самостоятельную работу студентов и способствует более глубокому освоению курса и отработке приёмов решения задач.

Всем, имеющим отношение к преподаванию дискретной математики, знакомы, ставшие классическими, задачники: «Задачи и упражнения по дискретной математике» Г.П. Гаврилова и А.А. Сапоженко, «Алгебра логики в задачах» С.Г. Гиндикина, а также «Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов» И.А. Лаврова и Л.Л. Максимовой, но в настоящее время ощущается потребность в задачниках по дискретной математике, содержащих серии однотипных задач для выполнения студентами индивидуальных заданий.

Настоящий сборник отражает многолетний опыт работы автора, приобретённый им в Самарском государственном аэрокосмическом университете им. С.П. Королёва при чтении лекций, а также при ведении практических занятий по курсам «дискретная математика» и «математическая логика и теория алгоритмов».

Система индивидуальных заданий, практикуемая в СГАУ с 80-х годов прошлого века, хорошо себя зарекомендовала. При проведении практических занятий студенты с большим вниманием следят и активно участвуют в решении и разборе задач, аналогичных тем, что им придётся выполнять индивидуально. Большинство разделов курса дискретной математики подкреплено и проиллюстрировано индивидуальными заданиями, и самостоятельное решение студентами задач помогает им лучше усвоить теорию и получить практические навыки работы с объектами, являющимися предметом изучения дискретной математики. Выполнение комплекса задач, вошедших в данное пособие, даёт возможность студентам освоить базовые понятия дискретной математики, прочувствовать связи между ними и отработать приёмы решения основных типов задач данного предмета.

Каждое задание даётся в 30 вариантах, и для каждого задания в сборнике приведён образец решения, что может помочь студентам внимательно разобрать предлагаемые способы решения задач и грамотно оформить выполненные индивидуальные задания.

Данное пособие может быть также полезно для вузов, практикующих заочную форму обучения, а также для всех энтузиастов, решивших изучить дискретную математику самостоятельно.

Пособие состоит из 6 глав:

- Множества, графики, соответствия, отношения;
- Булевы функции;
- Теория алгоритмов;
- Предикаты;
- Комбинаторика;
- Конечные автоматы.

В начале каждой главы вводятся понятия, даются определения и формулировки теорем, используемых при выполнении заданий, что практически исключает необходимость привлечения дополнительной литературы по рассматриваемой тематике.

Содержание

Глава 1.

Множества, графики, соответствия, отношения

1.1. Операции над множествами

Запись $x \in A$ означает, что элемент x *принадлежит* множеству A. Если x не является элементом множеств A, то пишут $x \notin A$ или $\overline{x \in A}$. Два множества A и B считаются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Будем писать $A = B$, если A и B равны и $A \neq B$ в противном случае.

Множество называется *пустым* и обозначается $\varnothing$, если оно не содержит элементов.

Будем говорить, множество A *включено* в множество B и писать $A \subseteq B$, если каждый элемент множества A является элементом множества B. В этом случае A называется *подмножеством* множества B. Считается, что для любого A справедливо включение $\varnothing \subseteq A$.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то будем писать $A \subset B$ и говорить, что множество A *строго включено* во множество B.

Семейство всех подмножеств данного множества A обозначается $P(A)$.

Мощностью конечного множества A будем называть число его элементов. Мощность конечного множества A обозначается $|A|$.

Объединением множеств A и B называется множество

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$$

Пересечением множеств A и B называется множество

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$

Разностью множеств A и B называется множество

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

Если все рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого *универсального* множества U, то разность $U \setminus A$ называется *дополнением* A и обозначается $\overline{A}$.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество

$$A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Будем говорить, что множества A и B находятся *в общем положении*, и писать $A \between B$, если существуют такие элементы $a, b, c,$ что $a \in A$ и $a \notin B$, $b \in$ B и $b \notin B$, $c \in A$ и $c \in B$.

Задание 1.1.1

1. Справедливо ли в общем случае утверждение:

если $A \alpha B$ и $B \beta C$ и $C \gamma D$ то $A \delta D$?

2. Может ли при некоторых A, B, C и D выполниться набор условий: $A \alpha B$ и $B \beta C$ и $C \gamma D$ и $A \delta D$?

Таблица 1.1.1

№	α	β	γ	δ
1	$\subseteq$	$\in$	$\subset$	$\subseteq$

№	α	β	γ	δ
11	$\in$	$\in$	$\subset$	$\in$

№	α	β	γ	δ
21	$\in$	$\subset$	$\subset$	$\subset$

2	$\in$	$\in$	$\subseteq$	$\in$
3	$\subseteq$	$\subseteq$	$\in$	$\in$
4	$\in$	$\subseteq$	$\in$	$\subseteq$
5	$\subset$	$\subset$	$\in$	$\subseteq$
6	$\in$	$\in$	$\in$	$\subseteq$
7	$\in$	$\subset$	$\subseteq$	$\subset$
8	$\in$	$\in$	$\subseteq$	$\subseteq$
9	$\in$	$\subseteq$	$\in$	$\subset$
10	$\in$	$\subseteq$	$\subseteq$	$\subseteq$

12	$\subseteq$	$\in$	$\subseteq$	$\in$
13	$\subseteq$	$\subseteq$	$\subseteq$	$\in$
14	$\subseteq$	$\in$	$\in$	$\subseteq$
15	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
16	$\subseteq$	$\subseteq$	$\in$	$\subset$
17	$\subset$	$\in$	$\subset$	$\in$
18	$\in$	$\subseteq$	$\subseteq$	$\in$
19	$\subset$	$\subseteq$	$\subseteq$	$\subseteq$
20	$\in$	$\in$	$\subset$	$\in$

22	$\subset$	$\subset$	$\in$	$\in$
23	$\in$	$\in$	$\subset$	$\subset$
24	$\subset$	$\subset$	$\subset$	$\in$
25	$\subset$	$\in$	$\in$	$\subset$
26	$\in$	$\subset$	$\in$	$\in$
27	$\in$	$\subset$	$\subset$	$\in$
28	$\subset$	$\in$	$\subseteq$	$\subset$
29	$\in$	$\subset$	$\subseteq$	$\subset$
30	$\subset$	$\subseteq$	$\in$	$\subset$

Примеры решения задания 1.1.1

Пример 1.

а) Справедливо ли в общем случае утверждение :

если $A \subset B,\quad B \subseteq C$ *и* $C \subset D,$ *то* $A \subseteq D$ *?*

Пусть $x \in A.$ Так как $A \subset B,$ из определения включения следует, что $x \in B.$ Так как $x \in B$ и $B \subseteq C,$ то $x \in C.$ Так как $x \in C$ и $C \subset D,$ то $x \in D.$ Итак, из того, что произвольный элемент $x \in A$ следует, что $x \in D.$ На основании определения заключаем, что $A \subseteq D,$ то есть данное утверждение верно.

б) Может при некоторых A, B, C *и* D *выполняться набор условий:* $A \subset B,\quad B \subseteq C$ *и* $C \subset D,$ *и* $A \subseteq D$ *?*

Да может. Это следует из справедливости утверждения в пункте а).

Примером могут служить множества $A = \{x\},\quad B = C = \{x, y\},$ $D = \{x, y, z\}.$ Тогда $\{x\} \subset \{x, y\},\quad \{x, y\} \subseteq \{x, y\}$, $\{x, y\} \subset \{x, y, z\}$ и $\{x\} \subseteq \{x, y, z\}$.

Пример 2 .

а*) Справедливо ли в общем случае утверждение:*

если $A \subset B,\quad B \in C$ *и* $C \in D,$ *то* $A \subseteq D$ *?*

Пусть $A = \{x\},\ B = \{x, y\},\quad C = \{\{x, y\}, z\},\ D = \{\{\{x, y\}, z\}, w\}$.

Тогда $\{x\} \subset \{x, y\}$ и $\{x, y\} \in \{\{x, y\}, z\} \in \{\{\{x, y\}, z\}, w\}$.

Но в то же время неверно, что $\{x\} \subset \{\{\{x,y\},z\},w\}$, так как единственный элемент x множества A не является элементом множества D, состоящего из элементов $\{\{x,y\},z\}$ и w. Итак, утверждение из нашего примера 2а) в общем случае неверно.

б) Может ли при некоторых A, B, C и D выполняться набор условий: $A \subset B$, $B \in C$, $C \in D$ *и* $A \subseteq D$*?*

Да, может. Например, $A = \varnothing$, $B = \{x\}$, $C = \{\{x\},y\}$, $D = \{\{\{x\},y\},z\}$.

Тогда $\varnothing \subset \{x\}$, $\{x\} \in \{\{x\},y\}$, $\{\{x\},y\} \in \{\{\{x\},y\},z\}$ и в то же время $\varnothing \subseteq \{\{\{x\},y\},z\}$.

Задание 1.1.2

Для универсального множества $U = \{-5,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,5\}$, множества A, заданного списком и для B, являющимся множеством корней уравнения $x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$

1. Найти множества : $A \cup B$, $B \cap A$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \vartriangle B$, $\overline{B}$, $C = (A \vartriangle B) \vartriangle A$. .

2. Выяснить, какая из пяти возможностей выполнена для множеств A и Ñ : $A \subset C$, или $C \subset A$, или $A = C$, или $A \cap C = \varnothing$, или $A \between C$.

3. Найти $P(B)$ и $|P(B)|$.

Таблица 1.1.2

№	A	α	β	γ	δ	№	A	α	β	γ	δ
1	–1,1,4,3	1	–12	–28	–16	**16**	–1,1,2,3	–3	–3	7	6
2	–1,1,2,3	7	13	–3	–18	**17**	–1,1,3,2	–7	12	4	–16
3	–1,1,3,4	–2	–12	18	27	**18**	–2, –1,2,4	–1	–7	13	–6
4	–1,1,2,3	0	–17	36	–20	**19**	–1,1,2,3	–4	3	4	–4
5	–2,1,3,4	0	–11	–18	–8	**20**	–1,1,2,3	–5	–3	13	10
6	–1,1,4,5	3	–9	–23	–12	**21**	–3,5,3,4	–11	39	–49	20
7	–3,–1,1,2	–2	–7	20	–12	**22**	1,2,3,4	–6	8	6	–9

8	–4,–1,1,2	0	–11	18	–8	**23**	–1,–2,1,2	–3	–2	12	–8
9	–2,–1,3,5	3	–7	–15	18	**24**	–1,2,5,4	0	–9	–4	12
10	–3,–1,1,2	5	1	–21	–18	**25**	–1,–2,–3,1	–4	–10	28	–15
11	–2,2,3,4	2	–7	–20	–12	**26**	1,4,2,3	3	–3	–7	6
12	–3,–1,2,4	–2	–15	–4	20	**27**	–1,1,2,4	1	–12	4	16
13	–1,–3,2,3	–5	1	21	–18	**28**	–1,1,2,3	–2	–4	2	3
14	–4,–3,1,2	1	–7	–13	–6	**29**	–1,4,2,3	–4	–2	12	9
15	–5,–1,1,3	6	0	–22	15	**30**	–1,2,3,4	3	1	–3	–2

Пример решения задания 1.1.2

Решим задание 1.1.2 для $A = \{1,-2,3,-4\}$ *и уравнения*

$$x^4 - 7x^3 + 6x^2 + 32x - 32 = 0\,.$$

Сначала найдём множество B корней данного уравнения. Подбором устанавливаем, что корнем исходного многочлена

$x^4 - 7x^3 + 6x^2 + 32x - 32$ является 1; поделив этот многочлен на $x - 1$, получим многочлен $x^3 - 6x^2 + 32$.

Также подбором устанавливаем, что –2 является корнем многочлена $x^3 - 6x^2 + 32$ и делим этот многочлен на $x + 2$. Получим многочлен $x^2 - 8x + 16$. Его корни совпадают и равны 4.

Итак, множество B найдено, $B = \{-2,1,4\}$. Теперь решаем пункты 1-3 данного задания.

1. $A \cup B = \{-4,-2,1,3,4\}$, $\boldsymbol{B \cap A = \{-2,1\}}$, $A \setminus B = \{-4,3\}$, $B \setminus A = \{4\}$,

$A \,\triangle\, B = \{-4,3,4\}$, $\overline{B} = \{-5,-4,-3,-1,2,3,5\}$,

$C = (A \,\triangle\, B) \,\triangle\, A = \{-4,3,4\} \triangle \{1,-2,3,-4\} = \{4\} \cup \{1,-2\} = \{-2,1,4\}$.

2. Так как $-4 \in A$ и $-4 \notin C$, $4 \in C$ и $4 \notin A$, $1 \in A \cap C$, значит, $A \between B$.

3. $P(B) = \{\varnothing, \{-2\}, \{1\}, \{4\}, \{-2,1\}, \{-2,4\}, \{1,4\}, \{-2,1,4\}\}$.

Как видим, $P(B)$ содержит 8 элементов, т.е. $|P(B)|=8$.

Задание 1.1.3

Пусть A, B и C – множества точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям α, β и γ соответственно. Изобразите в системе координат $x0y$ множество D, полученное из множеств A, B и C по формуле δ.

Таблица 1.1.3

№		условия	№		условия
1	α	$x^2+y^2-6y\le 0$	2	α	$y-\frac{4}{x}\le 0$
	β	$y+x^2+1\ge 0$		β	$y^2+x^2-25\le 0$
	γ	$\lvert x\rvert\le 6;\quad -3\le y\le -2$		γ	$\lvert x\rvert\le 1;\quad \lvert y\rvert\le 1$
	δ	$(A\cup B)\Delta C$		δ	$(A\cap B)\setminus C$
3	α	$0\le y\le\sqrt{x}$	4	α	$\lvert x\rvert\le 5;\quad \lvert y\rvert\le 1$
	β	$2\le x\le 6;\quad -3\le y\le 1$		β	$\lvert x\rvert\le 1;\quad \lvert y\rvert\le 5$
	γ	$x^2+y^2-18x\le 0$		γ	$y^2+x^2-16\le 0$
	δ	$(A\cup B)\setminus C$		δ	$A\cup B\cup C$
5	α	$y-x^2-1\le 0$	6	α	$y-\frac{4}{x}\le 0$
	β	$y-x^2+3\ge 0$		β	$y+\frac{4}{x}\ge 0$
	γ	$x>0$		γ	$y^2+x^2-25\le 0$
	δ	$(A\cap B)\setminus C$		δ	$(A\cap B)\setminus C$
7	α	$x^2+y^2-4x\le 0$	8	α	$y-x^4-1\le 0$
	β	$x^2+y^2+4x\le 0$		β	$0\le y\le\sqrt{x}$
	γ	$\lvert x\rvert\le 2;\quad \lvert y\rvert\le 2$		γ	$x^2+y^2-4x\le 0$
	δ	$(A\cup B)\Delta C$		δ	$(A\cap B)\Delta C$

Таблица 1.1.3(продолжение)

№		**условия**		**№**	**условия**
9	α	$y+x^2-5\le 0$	**10**	α	$y^2+x^2-9\le 0$
	β	$x^2+y^2-6y\le 0$		β	$\lvert y\rvert\le 4;\quad -6\le x\le 1$
	γ	$x>0$		γ	$y<0$
	δ	$A\setminus(B\cup C)$		δ	$(A\wedge B)\setminus C$
11	α	$x-y>0$	**12**	α	$y+x^2-6\le 0$
	β	$x+y<0$		β	$\lvert x\rvert>2;\quad \lvert y\rvert>2$
	γ	$x^2+y^2\le 4$		γ	$x<y$
	δ	$(A\vartriangle B)\cup C$		δ	$A\cap B\cap C$
13	α	$y\le\sin x$	**14**	α	$x<y+3$
	β	$y>0{,}5$		β	$x>y-3$
	γ	$y>-2$		γ	$\lvert x\rvert<5;\quad \lvert y\rvert<2$
	δ	$(A\vartriangle B)\cap C$		δ	$(A\cap B)\setminus C$
15	α	$y-\dfrac{5}{x}\le 0$	**16**	α	$x^2+y^2+6y\le 0$
	β	$y+\dfrac{2}{x}\ge 0$		β	$y+x^2+1\ge 0$
	γ	$y\ge 1$		γ	$\lvert x\rvert\le 4;\quad -4\le y\le -2$
	δ	$(A\cap B)\setminus C$		δ	$A\cap(B\setminus C)$
17	α	$x^2+y^2-25\le 0$	**18**	α	$0\le y\le\sqrt{x}$
	β	$y-\dfrac{4}{x}\le 0$		β	$2\le x\le 6;\quad -3\le y\le 1$
	γ	$x^2+y^2-4\le 0$		γ	$x^2+y^2-18x\le 0$
	δ	$(A\setminus B)\cup C$		δ	$(A\vartriangle B)\vartriangle C$

Таблица 1.1.3(продолжение)

№		условия		№	условия
19	α	$\lvert x\rvert \le 5;\quad \lvert y\rvert \le 1$	20	α	$x^2 - y - 2 \ge 0$
	β	$\lvert x\rvert \le 1;\quad \lvert y\rvert \le 5$		β	$x^2 - y + 4 \ge 0$
	γ	$x^2 + y^2 \le 16$		γ	$y > 1$
	δ	$(A \cup B) \Delta C$		δ	$(A \cap B) \setminus C$
21	α	$\lvert x\rvert \le 5;\quad \lvert y\rvert \le 5$	22	α	$y + x^2 - 5 \le 0$
	β	$y + \frac{4}{x} \ge 4$		β	$x^2 + y^2 - 6y \le 0$
	γ	$y - \frac{4}{x} \le 0$		γ	$y \ge 0$
	δ	$A \setminus (B \cap C)$		δ	$(A \Delta B) \cap C$
23	α	$x^2 - y \ge 0$	24	α	$y + x^2 - 6 \le 0$
	β	$x + y \ge 0$		β	$x^2 + y^2 \le 4$
	γ	$\lvert x\rvert \le 2;\quad \lvert y\rvert \le 2$		γ	$x < y$
	δ	$(A \Delta B) \cup C$		δ	$(A \setminus B) \cap C$
25	α	$\lvert x\rvert \le 4;\quad \lvert y\rvert \le 4$	26	α	$x \ge \cos y$
	β	$x^2 + y^2 \le 25$		β	$x < 0{,}5$
	γ	$y > 0$		γ	$y > 0$
	δ	$A \cap (B \setminus C)$		δ	$(A \Delta B) \cap C$
27	α	$y - x^2 + 4 \ge 0$	28	α	$y - x^2 - 1 \le 0$
	β	$\lvert x\rvert \le 2;\quad -4 \le y \le 0$		β	$y - x^2 + 3 \ge 0$
	γ	$x^2 + y^2 \le 1$		γ	$x^2 + y^2 \le 3$
	δ	$(A \cup B) \setminus C$		δ	$(A \cap B) \setminus C$

Таблица 1.1.3(окончание)

29	α	$y-\frac{4}{x}\le 0$	30	α	$2\le x\le 6;\quad -3\le y\le 1$
	β	$x^2+y^2-25\le 0$		β	$0\le y\le \sqrt{x}$
	γ	$\lvert x\rvert\le 4;\quad \lvert y\rvert\le 3$		γ	$x^2-12x+y^2\le 0$
	δ	$A\cap(B\setminus C)$		δ	$(A\triangle B)\triangle C$

Пример решения задания 1.1.3.

Пусть A, B и C - множества *точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям* $x+2<y$, $x^2+y^2\le 4$ *и* $\lvert x\rvert\le 2;\ \lvert y\rvert\le 2$ *соответственно. Изобразите в системе координат* $x0y$ *множество* D, *полученное из множеств* A, B *и* C *по формуле* $A\setminus(B\triangle C)$.

Множество B представляет из себя множество точек круга радиуса 2 с центром в начале координат, включающего границу, A – множество точек плоскости, расположенных выше и на прямой $y=x+2$ и C – множество точек, лежащих внутри и на границе квадрата $\lvert x\rvert\le 2;\ \lvert y\rvert\le 2$.

Отметим горизонтальной штриховкой множество $B\triangle C$, а вертикальной – множество A (рис.1.1.3а) :

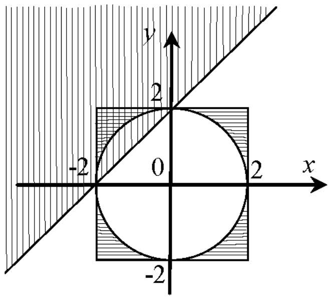


Рис.1.1.3а

Удалив из области, помеченной вертикальной штриховкой, точки области, помеченной горизонтальной штриховкой, мы получим множество точек, образующих D. Изобразим результат, отметив точки множества D вертикальной штриховкой (рис 1.1.3б):

Пунктиром изображена часть границы заштрихованной области, не принадлежащая множеству D.

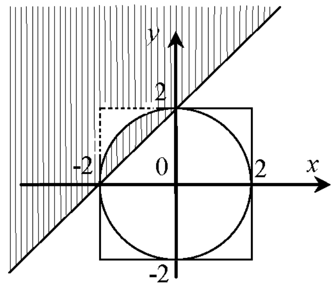


Рис. 1.1.3б

Задание 1.1.4

1. Существуют ли множества A, B, X такие, что выполняется набор условий α?

2. Существуют ли множества N, E, P такие, что выполняется набор условий β?

Таблица 1.1.4

№	α	β
1	$X\setminus B=A\setminus B=\overline{A\cup B}=\varnothing,\ \overline{B}\neq\varnothing$	$N\setminus E=N\setminus P=\varnothing,\ E\setminus P\neq\varnothing$
2	$B=\overline{A\cup B}=X\setminus B=\varnothing,\ \overline{A}\cap\overline{B}\neq\varnothing$	$E\setminus P=N\setminus E=\varnothing,\ N\setminus P\neq\varnothing$
3	$B\setminus A=A\cap X=\varnothing,\ B\cap X\neq\varnothing$	$N\cap E=\overline{E\cup N}=\overline{P}=\varnothing,\ N\neq\varnothing$
4	$B\setminus X=X\setminus A=\varnothing,\ B\neq\varnothing$	$P\setminus E=N\setminus E=\varnothing,\ (P\cap E)\setminus N\neq\varnothing$
5	$A\cap B=\overline{A\cup X}=\varnothing,\ B\setminus X\neq\varnothing$	$P\setminus N=E=N\setminus P=\varnothing,\ N\neq\varnothing$
6	$A\setminus X=B\setminus A=X\setminus A=\varnothing,\ B\neq\varnothing$	$P\cap N=(N\setminus P)\setminus E=\varnothing,\ N\setminus E\neq\varnothing$
7	$A\setminus X=B\setminus A=\overline{A}=\varnothing,\ \overline{X}\neq\varnothing$	$N\cup E=E\cap P=\varnothing,\ P\setminus N\neq\varnothing$
8	$A\setminus X=(B\setminus A)\cap X=\varnothing,\ X\setminus A\neq\varnothing$	$P\cap N=E\setminus P=P\setminus N=\varnothing,\ E\neq\varnothing$
9	$X\setminus B=(B\setminus A)\cap X=\varnothing,\ X\setminus A\neq\varnothing$	$E\setminus N=N\cap E=N\setminus P=\varnothing,\ N\neq\varnothing$
10	$\overline{A}=X\setminus B=B\setminus X=\varnothing,\ B\neq\varnothing$	$P\setminus N=\overline{P\cup E}=\varnothing,\ \overline{N}\cap\overline{E}\neq\varnothing$
11	$(X\setminus A)\setminus B=B\setminus A=\overline{X\cup B}=\varnothing,\ \overline{A}\neq\varnothing$	$N\setminus E=E\setminus P=P\setminus E=\varnothing,\ E\setminus N\neq\varnothing$

12	$B \setminus X = A \cap X = \varnothing, B \neq \varnothing$	$P \cap N \cap E = N \setminus P = \varnothing,\ N \cap E \neq \varnothing$

Таблица 1.1.4(окончание)

№	α	β
13	$A = X = (B \setminus A) \setminus X = \varnothing, B \neq \varnothing$	$N \setminus P = E \cap P = \varnothing,\ E \neq \varnothing$
14	$A \cap X = B \setminus A = \varnothing,\ X \neq \varnothing$	$P \setminus E = N \setminus E = \overline{N \cup E} = \varnothing,\ \overline{E} \neq \varnothing$
15	$A \setminus B = X \setminus A = \varnothing,\ X \setminus B \neq \varnothing$	$P \setminus N = N \setminus P = P \setminus E = \varnothing,\ \overline{E} \neq \varnothing$
16	$A \cap X = \overline{X} \cap \overline{A} = B \setminus A = \varnothing,\ A \cap B \neq \varnothing$	$N \setminus P = (N \cap P) \setminus E = \varnothing,\ N \setminus E \neq \varnothing$
17	$B \cap X = \overline{A \cup B} = \varnothing,\ X \setminus A \neq \varnothing$	$P \setminus E = N \setminus E = N \cap P = \varnothing,\ P \neq \varnothing$
18	$B \setminus A = B \setminus X = X \setminus B = \varnothing,\ B \neq \varnothing$	$P \setminus N = N \cap P = \varnothing,\ P \cap E \neq \varnothing$
19	$X \cap B = (X \setminus B) \setminus A = \varnothing,\ X \setminus A \neq \varnothing$	$E \Delta P = N \cap E = \varnothing,\ P \setminus N \neq \varnothing$
20	$A \cap B = X \setminus A = \varnothing,\ B \setminus A \neq \varnothing$	$N \setminus P = E \setminus N = \overline{N} = \varnothing,\ \overline{P} \neq \varnothing$
21	$X \setminus B = A \setminus X = \varnothing,\ A \setminus B \neq \varnothing$	$E = \overline{N \cup E} = P \setminus E = \varnothing,\ \overline{N} \cap \overline{E} \neq \varnothing$
22	$A \setminus B = A \setminus X = \varnothing,\ X \setminus B \neq \varnothing$	$E \setminus P = N \setminus P = \overline{N \cup P} = \varnothing,\ \overline{P} \neq \varnothing$
23	$B \setminus X = A \setminus X = \varnothing,\ (B \cap X) \setminus A \neq \varnothing$	$N \setminus E = E \setminus P = \varnothing,\ N \neq \varnothing$
24	$B \setminus A = X = A \setminus B = \varnothing,\ A \neq \varnothing$	$P \cap N = \overline{P \cup E} = \varnothing,\ N \setminus E \neq \varnothing$
25	$B \cap A = (A \setminus B) \setminus X = \varnothing,\ A \setminus X \neq \varnothing$	$P \setminus E = N \setminus P = E \setminus P = \varnothing,\ N \neq \varnothing$
26	$A \cup X = X \cap B = \varnothing,\ B \setminus A \neq \varnothing$	$P \setminus E = N \setminus P = \overline{P} = \varnothing,\ \overline{E} \neq \varnothing$
27	$B \cap A = X \setminus B = B \setminus A = \varnothing,\ X \neq \varnothing$	$P \setminus E = (N \setminus P) \cap E = \varnothing,\ E \setminus P \neq \varnothing$
28	$X \setminus A = A \cap X = A \setminus B = \varnothing,\ A \neq \varnothing$	$E \setminus N = (N \setminus P) \cap E = \varnothing,\ E \setminus P \neq \varnothing$
29	$B \setminus A = \overline{B \cup X} = \varnothing,\ \overline{A} \cap \overline{X} \neq \varnothing$	$\overline{P} = E \setminus N = N \setminus E = \varnothing,\ N \neq \varnothing$
30	$A \cap X = \overline{B \cup A} = \overline{B} = \varnothing,\ A \neq \varnothing$	$N \setminus P = P \cap E = \varnothing,\ N \cap E \neq \varnothing$

Пример решения задания 1.1.4

1. Существуют ли множества A, B, X такие, что выполняется набор условий: $\overline{A \cup B} = \varnothing,\quad X \Delta A = \varnothing,\quad B \setminus A \neq \varnothing$ *?*

Изобразим множества A, B, X в виде прямоугольников, расположенных на плоскости в общем положении, и поставим в каждой области, на которые плоскость разбита прямоугольниками, по одному символу:

Символ 4, например, обозначает список всех элементов, попавших во множества A и B, но не попавших в X, и т.д. Теперь составим множества A, B, X и универсальное множество U (рис 1.1.4):

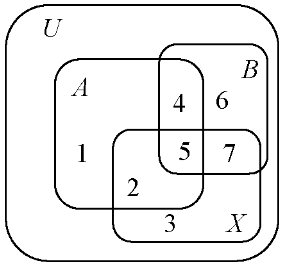


Рис.1.1.4

$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A = \{1,2,4,5\}$, $B = \{4,5,6,7\}$, $X = \{2,3,5,7\}$. Изменим множества A, B, X так, чтобы выполнились условия нашего задания.

Из того, что $\overline{A \cup B} = \varnothing$ следует, что множество $U \setminus (A \cup B)$ не должно содержать элементов, т.е. из U удаляем 8 и 3. Чтобы выполнилось условие $X \vartriangle A = \varnothing$, нужно удалить элементы списков 1, 4, 7. Тогда получится, что множества A, B, X и U имеют следующий вид: $A = \{2,5\} = X$, $B = \{5,6\}$, $U = \{2,5,6\}$.. Заметим, что для этих множеств $B \setminus A = \{6\} \neq \varnothing$.

Если под символами 2, 5 и 6 будем понимать соответствующие числа, то мы получим конкретный пример множеств A, B, X, для которых выполнены все условия заданного набора требований.

2. Существуют ли множества N, E, P такие, что выполняется набор условий: $E \setminus N = P \setminus E = \varnothing$, $P \setminus N \neq \varnothing$?

Попробуем построить множества N, E, P так же, как мы это делали в п.1. Пусть $N = \{1,2,4,5\}$, $E = \{4,5,6,7\}$, $P = \{2,3,5,7\}$. Чтобы выполнилось условие $E \setminus N = \varnothing$, удаляем элементы списков 6,7. Для выполнения условия $P \setminus E = \varnothing$ удаляем элементы из списков 2,3. Но тогда множество $P \setminus N$ не будет содержать элементов. Итак, мы показали, что этот набор условий противоречив, т.е. не существует множеств N, E, P таких, что выполнены условия упражнения.

Задание 1.1.5

Выяснить взаимное расположение множеств D, E, F, если A, B, X - произвольные подмножества универсального множества U.

Таблица 1.1.5

1	***D***	$B\cup\overline{X}$	2	***D***	$(A\cap B)\cup(A\setminus X)\cup\overline{B\cup X}$
	E	$(B\cap X)\cup(\overline{X}\setminus(A\cap B))$		***E***	$A\cup\overline{B}\cup X$
	F	$(\overline{B}\cap\overline{X})\cup(B\cap(X\setminus A))$		***F***	$(\overline{B}\cap\overline{X})\cup(B\cap A)$
3	***D***	$(A\Delta X)\cup(B\cap A)$	4	***D***	$(B\cap X)\cup\overline{A\cup X}$
	E	$A\cup X$		***E***	$((B\cup\overline{X})\setminus A)\cup(X\cap B))$
	F	$(A\setminus X)\cup(B\cap X)\cup(X\setminus A)$		***F***	$\overline{A}\cup X$
5	***D***	$(X\cap B)\cup(A\setminus B)\cup\overline{A\cup X}$	6	***D***	$\overline{A\cup B}\cup(X\cap B)$
	E	$A\cup B\cup\overline{X}$		***E***	$(\overline{B}\cap\overline{A})\cup(X\cap(B\setminus A))$
	F	$(A\Delta B)\cup(X\cap A)\cup\overline{X\cup B}$		***F***	$\overline{A}\cup X$
7	***D***	$\overline{A\Delta X}\cup(X\setminus B)$	8	***D***	$(A\setminus X)\cup\overline{A\cup B}$
	E	$(\overline{B\cap X}\setminus A)\cup(X\cap A)$		***E***	$(\overline{B}\cap\overline{A})\cup((A\setminus B)\setminus X)$
	F	$A\cup\overline{X}\cup\overline{B}$		***F***	$(A\setminus X)\cup\overline{B}$
9	***D***	$\overline{A\Delta X}\cup(A\cap B)$	10	***D***	$(\overline{B\cap X}\setminus A)\cup(X\setminus B)$
	E	$(A\cap X)\cup((A\setminus B)\setminus X)$		***E***	$\overline{A\cup X}\cup(X\cap\overline{B})$
	F	$A\cup\overline{X}$		***F***	$\overline{A}\cup X$
11	***D***	$(A\Delta B)\cup(X\setminus A)$	12	***D***	$\overline{A\Delta X}\cup(X\cap(B\setminus A))$
	E	$((A\cup X)\setminus B)\cup((X\cup B)\setminus A)$		***E***	$(A\cap B)\cup((X\setminus B)\setminus A)$
	F	$\overline{A}\cup(A\setminus B)$		***F***	$\overline{A}\cup B$
13	**D**	$\overline{A\Delta X}\cup(X\setminus B)$	14	***D***	$(A\Delta B)\cup(X\cap B)$
	E	$\overline{A}\cup X$		***E***	$A\cup B$
	F	$(\overline{A}\cap\overline{X})\cup(X\cap(A\setminus B))$		***F***	$(B\setminus A)\cup(A\cap X)\cup(A\setminus B)$

Таблица 1.1.5(окончание)

15	***D***	$\overline{A\cup B}\cup(X\cap A)$	**16**	***D***	$(X\cap B)\cup(B\setminus A)\cup\overline{A\cup X}$
	E	$A\cup\overline{B}$		***E***	$(\overline{A}\cap\overline{X})\cup(X\cap B)$
	F	$((X\cup\overline{A})\setminus B)\cup(X\cap A))$		***F***	$A\cup\overline{X}\cup B$
17	***D***	$(A\cap X)\cup(B\setminus X)\cup\overline{A\cup B}$	**18**	***D***	$(A\cap X)\cup\overline{B\cup X}$
	E	$(X\Delta B)\cup(B\cap A)\cup\overline{X\cup B}$		***E***	$A\cup\overline{B}$
	F	$X\cup\overline{A}\cup B$		***F***	$(\overline{B}\cap\overline{X})\cup(A\cap(X\setminus B))$
19	***D***	$\overline{A\Delta B}\cup(A\setminus X)$	**20**	***D***	$\overline{X\cup B}\cup(B\setminus A)$
	E	$B\cup\overline{X}\cup\overline{A}$		***E***	$(B\setminus A)\cup\overline{X}$
	F	$(\overline{A\cap X}\setminus B)\cup(A\cap B)$		***F***	$(\overline{B}\cap\overline{X})\cup((B\setminus X)\setminus A)$
21	***D***	$\overline{A}\cup B$	**22**	***D***	$\overline{A\cup B}\cup(\overline{X}\cap A)$
	E	$(A\cap B)\cup((B\setminus X)\setminus A)$		***E***	$A\cup(A\setminus B)$
	F	$\overline{A\Delta B}\cup(X\cap B)$		***F***	$(\overline{A\cap X}\setminus B)\cup((A\setminus X)$
23	***D***	$(B\setminus X)\cup\overline{B}$	**24**	***D***	$\overline{B\Delta X}\cup(A\cap(X\setminus B))$
	E	$(B\Delta X)\cup(A\setminus B)$		***E***	$\overline{B}\cup X$
	F	$((B\cup A)\setminus X)\cup((X\cup A)\setminus B)$		***F***	$(B\cap X)\cup((A\setminus X)\setminus B))$
25	***D***	$B\cup X$	**26**	***D***	$((A\setminus B)\cap X)\cup\overline{A\cup X}$
	E	$((X\Delta B)\cap B)\cup(X\cap(A\cup B))$		***E***	$(A\cap X)\cup(\overline{A}\setminus(X\cap B))$
	F	$(B\cap A)\cup(B\cap X)$		***F***	$\overline{A}\cup X$
27	***D***	$(X\cap B)\cup(B\setminus A)\cup\overline{A\cup X}$	**28**	***D***	$\overline{A\cup B}\cup(X\cap A)$
	E	$A\cup B\cup\overline{X}$		***E***	$((X\cup\overline{A})\setminus B)\cup(X\cap A)$
	F	$(X\cap B)\cup\overline{X\cup A}$		***F***	$\overline{B}\cup A$
29	***D***	$(A\Delta B)\cup(X\cap B)$	**30**	***D***	$(A\cap X)\cup\overline{X\cup B}$
	E	$B\cup A$		***E***	$(\overline{B}\cap\overline{X})\cup(A\cap(X\setminus B))$
	F	$(A\setminus B)\cup(A\cap X)\cup(B\setminus A)$		***F***	$\overline{B}\cup A$

Пример решения задания 1.1.5

Выяснить взаимное расположение множеств :

$D=(B\setminus X)\cup(A\setminus B)$, $E=(A\setminus(B\setminus X))$, $F=A\cup B$, *если* A, B, X *- произвольные подмножества универсального множества* U .

Возьмём множества A, B, X , находящиеся в общем положении:

$A=\{1,2,4,5\}$, $B=\{4,5,6,7\}$, $X=\{2,3,5,7\}$. В нашем случае, как и при решении задания 1.1.3, цифры обозначают соответствующие списки переменных. Тогда $B\setminus X=\{4,6\}$, $A\setminus B=\{1,2\}$, $A\setminus(B\setminus X)=\{1,2,5\}$, $A\cup B=\{1,2,4,5,6,7\}$, $(B\setminus X)\cup(A\setminus B)=\{1,2,4,6\}$, то есть $D=\{1,2,4,6\}$, $E=\{1,2,5\}$, $F=\{1,2,4,5,6,7\}$.

Итак, видим, что включения $D\subseteq F$ и $E\subseteq F$ выполняются для произвольных множеств A, B, X.

Если символы 1,2,4,5,6,7 обозначают соответствующие числа, имеем, что $4\in D$ и $4\notin E$, $5\in E$ и $5\notin D$, $1\in D\cap E$, то есть множества D и E могут находиться в общем положении.

Задание 1.1.6

Проверить, что для любых множеств A, B, C выполнение включения α влечёт выполнение включения β.

Таблица 1.1.6

№	α	β
1	$A\cap B\subseteq C$	$A\cup B\subseteq(A\Delta B)\cup(A\cap C)$
2	$A\cap B\subseteq C$	$A\setminus C\subseteq(A\setminus B)\cup C$
3	$A\cap B\subseteq C$	$A\Delta C\subseteq(A\setminus B)\cup C$
4	$A\cap B\subseteq C$	$(B\setminus C)\cup(A\setminus C)\subseteq A\Delta B$
5	$A\cap B\subseteq C$	$B\subseteq(B\setminus A)\cup C$
6	$A\subseteq B\cup C$	$A\Delta C\subseteq(A\cap B)\cup C$
7	$A\subseteq B\cup C$	$A\setminus B\subseteq A\cap C$
8	$A\subseteq B\cup C$	$A\cup B\subseteq B\cup C$
9	$A\subseteq B\cup C$	$(A\setminus B)\cup(A\cap C)\subseteq C$

Таблица 1.1.6(окончание)

№	α	β
10	$A \subseteq B \cup C$	$(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subseteq B$
11	$A \subseteq B \cup C$	$(A \setminus B) \setminus C \subseteq C \setminus A$
12	$A \cup B \subseteq C$	$A \Delta B \subseteq (A \cap B) \cup C$
13	$A \cup B \subseteq C$	$A \cap C \subseteq A \cup (B \setminus A)$
14	$A \cup B \subseteq C$	$A \cap B \subseteq (B \cap C) \cup (A \cap C)$
15	$A \cup B \subseteq C$	$B \setminus A \subseteq B \cap C$
16	$A \subseteq B \setminus C$	$A \cap B \subseteq A \setminus C$
17	$A \subseteq B \setminus C$	$C \cap B \subseteq B \setminus A$
18	$A \cup B \subseteq C$	$A \Delta C \subseteq C \setminus A$
19	$A \cup B \subseteq C$	$(B \setminus C) \cup (A \setminus B) \subseteq A \cap C$
20	$A \cup B \subseteq C$	$B \subseteq A \cup (C \setminus A)$
21	$B \setminus C \subseteq A$	$A \cup B \subseteq (B \cap C) \cup A$
22	$B \setminus C \subseteq A$	$B \Delta C \subseteq C \cup (A \cap B)$
23	$B \setminus C \subseteq A$	$B \setminus A \subseteq (C \setminus A) \cup (A \cap B)$
24	$B \setminus C \subseteq A$	$B \subseteq C \cup (B \cap A)$
25	$B \setminus C \subseteq A$	$B \Delta C \subseteq C \cup A$
26	$B \setminus C \subseteq A$	$B \subseteq C \cup (A \setminus C)$
27	$B \subseteq C \setminus A$	$A \cup (B \setminus C) \subseteq A \setminus B$
28	$B \subseteq C \setminus A$	$(A \setminus B) \cup ((B \setminus C) \setminus A) \subseteq A$
29	$B \subseteq C \setminus A$	$(B \setminus C) \cup (B \setminus A) \subseteq B \cap C$
30	$B \subseteq C \setminus A$	$C \cup B \subseteq (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

Пример решения задания 1.1.6

Доказать, что для любых множеств A, B, C *выполнение включения* $A \setminus B \subseteq C$ *влечёт выполнение включения* $C \Delta A \subseteq (A \cap B) \cup C$.

Возьмём множества $A, B, C,$ находящиеся в общем положении: $A = \{1,2,4,5\}$, $B = \{4,5,6,7\}$, $C = \{2,3,5,7\}$. В нашем случае, как и при решении предыдущих заданий, цифры обозначают соответствующие списки переменных.

Тогда $A \setminus B = \{1,2\}$, из включения $A \setminus B \subseteq C$ следует, что список 1 пуст, $A = \{2,4,5\}$. Рассмотрим $C \Delta A$ и $(A \cap B) \cup C$. $C \Delta A = \{3,4,7\}$, $(A \cap B) \cup C = \{2,3,4,5,7\}$. Так как $\{3,4,7\} \subseteq \{2,3,4,5,7\}$, имеем, что включение $C \Delta A \subseteq (A \cap B) \cup C$ доказано в предположении, что выполнено включение $A \setminus B \subseteq C$.

Задание 1.1.7

Для произвольных множеств A, B, H проверить, является ли выполнение включения α необходимым и достаточным условием выполнения равенства β.

Таблица 1.1.7

№	α	β
1	$A \subseteq B \setminus H$	$H \setminus A = H \cup (A \setminus B)$
2	$A \subseteq B \setminus H$	$H = (H \setminus A) \cup ((A \setminus B) \setminus H)$
3	$A \subseteq B \setminus H$	$A \cap B = (A \setminus H) \cup (A \setminus B)$
4	$A \subseteq B \setminus H$	$B = (A \Delta B) \cup (A \setminus H)$
5	$A \subseteq B \setminus H$	$A \cup B = (B \setminus H) \cup (B \setminus A)$
6	$A \subseteq B \setminus H$	$B \setminus A = (A \Delta B) \cup (B \cap H)$
7	$A \subseteq B \setminus H$	$A \Delta H = H \cup (A \cap B)$
8	$A \subseteq B \setminus H$	$A \Delta B = (B \setminus A) \cup (H \cap B)$
9	$A \subseteq B \setminus H$	$A \cup H = (H \setminus A) \cup ((A \cap B) \setminus H)$
10	$A \subseteq B \setminus H$	$A \cap B = (A \setminus B) \setminus H$
11	$A \subseteq B \setminus H$	$A \setminus H = A \cap (B \cup H)$
12	$A \subseteq B \setminus H$	$A \setminus B = A \cap B \cap H$
13	$A \subseteq B \cap H$	$H = (A \Delta H) \cup (B \cap A)$
14	$A \subseteq B \cap H$	$A \cup B = (B \cap H) \cup (B \setminus A)$
15	$A \subseteq B \cap H$	$A \Delta B = (B \setminus H) \cup (B \setminus A)$
16	$A \subseteq B \cap H$	$B \setminus H = (A \setminus B) \cup ((B \setminus A) \setminus H)$

Таблица 1.1.7(окончание)

№	α	β
17	$A \subseteq B \cap H$	$(B \setminus A) \setminus H = (B \setminus H) \cup (A \setminus B)$
18	$A \subseteq B \cap H$	$A \cap B = (A \setminus B) \cup (A \cap H)$
19	$A \subseteq B \cap H$	$A \setminus H = (A \cap H) \setminus B$
20	$A \subseteq B \cap H$	$H \setminus A = (A \Delta H) \cup (A \setminus B)$
21	$A \cup B \subseteq H$	$B \setminus A = (A \setminus H) \cup ((B \cap H) \setminus A)$
22	$A \cup B \subseteq H$	$A \cup H = H \cup (B \setminus A)$
23	$A \cup B \subseteq H$	$A \cap H = A \cup (B \setminus H)$
24	$A \cup B \subseteq H$	$H \setminus A = (A \Delta H) \cup (B \setminus A)$
25	$A \cup B \subseteq H$	$B \Delta H = (A \setminus B) \cup (H \setminus B)$
26	$A \cup B \subseteq H$	$A \cap B = ((A \Delta B) \setminus H) \cup (A \cap B \cap H)$
27	$A \cup B \subseteq H$	$A \Delta B = (H \cap (A \Delta B)) \cup ((A \cap B) \setminus H)$
28	$A \cap B \subseteq H$	$H \setminus A = (A \Delta H) \setminus (A \setminus B)$
29	$A \cap B \subseteq H$	$B \setminus H = (B \setminus A) \setminus H$
30	$A \cap B \subseteq H$	$A \cup B = (A \Delta B) \cup (B \cap H)$

Пример решения задания 1.1.7

Для произвольных множеств A, B, H проверить, является ли выполнение включения $A \cup B \subseteq H$ необходимым и достаточным условием выполнения равенства $A \Delta H = (B \setminus A) \cup (H \setminus A)$.

Рассмотрим множества A, B, H: $A = \{1,2,4,5\}$, $B = \{4,5,6,7\}$, $H = \{2,3,5,7\}$. В нашем случае, как и при решении предыдущих заданий, цифры обозначают соответствующие списки переменных.

1. Посмотрим, какие множества мы получим, если потребуем выполнения условия $A \cup B \subseteq H$. $A \cup B = \{1,2,4,5,6,7\}$ и, чтобы было выполнено включение $A \cup B \subseteq H$, списки 1,4,6 должны быть пусты, и множества A, B, H будут таковы: $A = \{2,5\}$, $B = \{5,7\}$, $H = \{2,3,5,7\}$. Тогда $(B \setminus A) \cup (H \setminus A) = \{7\} \cup \{3,7\} = \{3,7\}$,

$A \Delta H = \{3,7\}$ и равенство $A \Delta H = (B \setminus A) \cup (H \setminus A)$ выполнено.

2. Посмотрим, какой вид примут множества $A = \{1,2,4,5\}$, $B = \{4,5,6,7\}$, $H = \{2,3,5,7\}$, чтобы выполнилось равенство $A \Delta H = (B \setminus A) \cup (H \setminus A)$.

$A \Delta H = \{1,3,4,7\}$, $(B \setminus A) \cup (H \setminus A) = \{6,7\} \cup \{3,7\} = \{3,6,7\}$. Для выполнения равенства $A \Delta H = (B \setminus A) \cup (H \setminus A)$ нужно, чтобы списки 1, 4 и 6 были пусты, и мы приходим к тем же множествам, что и в п.1, т.е. $A = \{2,5\}$, $B = \{5,7\}$, $H = \{2,3,5,7\}$.

Видим, что в этом случае $A \cup B = \{2,5,7\} \subseteq H$.

Значит, доказано, что для любых множеств A, B, H выполнение включения $A \cup B \subseteq H$ является необходимым и достаточным условием выполнения равенства $A \Delta H = (B \setminus A) \cup (H \setminus A)$.

Задание 1.1.8

Решить систему соотношений относительно множества X и указать условия совместности системы

Таблица 1.1.8

№	система	№	система	№	система
1	$\begin{cases} B \cap X = A \\ B \cup X = C \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$	**2**	$\begin{cases} (A \Delta X) \cup B = C \\ C \setminus X = A \cup B \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$	**3**	$\begin{cases} B \setminus X = A \\ B \cup X = C \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$
4	$\begin{cases} (A \Delta C) = X \cap B \\ X \setminus B = A \setminus C \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$	**5**	$\begin{cases} C \setminus X = B \setminus A \\ B \cup X = C \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$	**6**	$\begin{cases} B \Delta C = C \setminus X \\ X \cup A = C \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$
7	$\begin{cases} A \cap X = B \\ A \Delta X = C \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$	**8**	$\begin{cases} X \setminus B = C \setminus A \\ A \Delta X = C \Delta B \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$	**9**	$\begin{cases} C \setminus X = A \cup (C \setminus B) \\ A \cup X = B \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$
10	$\begin{cases} X \setminus B = C \setminus A \\ C \cap X = A \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$	**11**	$\begin{cases} B \setminus X = A \\ B \cup X = C \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$	**12**	$\begin{cases} X \cup (B \setminus A) = C \\ C \setminus X = A \cap B \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$

Таблица 1.1.8(окончание)

№	система	№	система	№	система
13	$\begin{cases} B \triangle X = C \backslash A \\ A \cap X = C \cap B \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$	**14**	$\begin{cases} A \triangle X = C \backslash B \\ A \cup X = B \cap X \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$	**15**	$\begin{cases} A \backslash B = C \backslash X \\ B \cup X = C \backslash A \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$
16	$\begin{cases} C \backslash X = A \triangle B \\ X \cap A = X \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$	**17**	$\begin{cases} C \backslash X = A \cup (C \backslash B) \\ X \cap B = X \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$	**18**	$\begin{cases} C \backslash X = C \backslash (A \cup B) \\ A \backslash B = X \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$
19	$\begin{cases} C \backslash X = A \cap B \\ X \backslash A = B \triangle C \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$	**20**	$\begin{cases} C \backslash X = A \cup B \\ X \backslash B = C \backslash A \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$	**21**	$\begin{cases} A \cap X = A \backslash B \\ X \triangle B = A \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$
22	$\begin{cases} B \cup X = C \\ X \cap B = A \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$	**23**	$\begin{cases} (A \triangle X) \cup B = C \\ C \backslash X = A \cup B \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$	**24**	$\begin{cases} B \backslash X = A \\ X \cup B = C \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$
25	$\begin{cases} X \cup (B \backslash A) = C \\ C \backslash X = A \cap B \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$	**26**	$\begin{cases} C \backslash A = X \triangle B \\ X \cap A = B \cap C \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$	**27**	$\begin{cases} C \backslash A = X \triangle B \\ X \cup B = A \cap X \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$
28	$\begin{cases} C \backslash A = X \triangle B \\ (A \triangle B) \cup X = C \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$	**29**	$\begin{cases} A \cap X = C \triangle B \\ X \backslash A = B \backslash C \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$	**30**	$\begin{cases} C \backslash X = A \triangle C \\ X \cup B = C \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$

Пример решения задания 1.1.8

Решить задание 1.1.8 для системы

$$\begin{cases} B \triangle C = X \cap A \\ X \backslash C = A \cap B \\ C \subseteq A \cap B \end{cases}$$

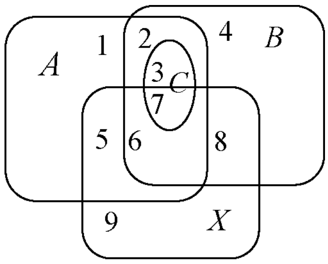


Рис. 1.1.8

I. Построим множества общего положения A, B, X и множество C (рис.1.1.8) такие, что $C \subseteq A \cap B$ и $C \between X$.

Символом 1 обозначим список элементов

множества A, не попавших ни в одно из множеств B, C, X, символом 7 – список элементов, попавших в каждое из множеств A, B, C, X и т.д. Будем иметь: $A=\{1{,}2{,}3{,}5{,}6{,}7\}$, $B=\{2{,}3{,}4{,}6{,}7{,}8\}$, $C=\{3{,}7\}$, $X=\{5{,}6{,}7{,}8{,}9\}$.

1. $B \triangle C=\{2{,}4{,}6{,}8\}$, $X \cap A=\{5{,}6{,}7\}$. Эти множества равны в силу первого уравнения системы, значит, списки элементов 2,4,5,7 и 8 пусты. Получили: $A=\{1{,}3{,}6\}$, $B=\{3{,}6\}$, $C=\{3\}$, $X=\{6{,}9\}$.

2. $X \setminus C=\{6{,}9\}$, $A \cap B=\{3{,}6\}$ Данные множества равны в силу второго уравнения системы, следовательно, списки элементов 3 и 9 пусты, и наши множества примут вид:

$A=\{1{,}6\}$, $B=\{6\}$, $C=\varnothing$, $X=\{6\}$.

Видим, что $X=B$, $B \subseteq A$, $C=\varnothing$.

II. Проверим, что, множество $X=B$ является решением исходной системы.

Если $C=\varnothing$ и $B \subseteq A$, то $C \subseteq A \cap B$ и можно записать:

$B=\{b\}$, $A=\{a,b\}$, где a, b - списки элементов.

Пусть $X=B=\{b\}$, тогда: $B \triangle C=B \setminus C=\{b\}=X \cap A$.

$X \setminus C=X=\{b\}=A \cap B$.

Видим, что все соотношения системы удовлетворяются, т.е. множество $X=B$ является решением исходной системы при выполнении условий $B \subseteq A$, $C=\varnothing$.

Ответ: $X=B$, $B \subseteq A$, $C=\varnothing$.

Задание 1.1.9

Решить систему уравнений относительно множества X и указать условия совместности системы или доказать её несовместность.

Таблица 1.1.9

№	система	№	система	№	система
1	$\begin{cases} A \cup X = B \cap X \\ A \cap X = C \cup X \\ \overline{A} \setminus X = C \setminus A \end{cases}$	**2**	$\begin{cases} A \setminus X = X \setminus B \\ X \setminus A = C \setminus X \\ \overline{B \cup X} = X \setminus A \end{cases}$	**3**	$\begin{cases} A \cap X = B \setminus X \\ X \setminus A = C \cup X \\ X \setminus C = A \cup B \end{cases}$
4	$\begin{cases} A \cup X = B \setminus X \\ X \setminus B = C \cup X \\ \overline{A} \setminus C = X \setminus A \end{cases}$	**5**	$\begin{cases} A \cup X = B \Delta \overline{C} \\ X \setminus C = B \cup X \\ \overline{B \cap X} = C \setminus A \end{cases}$	**6**	$\begin{cases} B \setminus C = A \Delta X \\ B \setminus X = A \setminus C \\ C \cap X = A \cap B \end{cases}$
7	$\begin{cases} B \setminus X = A \cap C \\ A \setminus X = C \setminus B \\ X \setminus C = A \cup B \end{cases}$	**8**	$\begin{cases} B \cup X = B \cap C \\ A \cup C = C \cap X \\ A \cup B = X \cap C \end{cases}$	**9**	$\begin{cases} A \cap X = B \cap A \\ C \setminus X = \overline{A \cup B} \\ \overline{A} = A \setminus B \end{cases}$
10	$\begin{cases} \overline{B \cap X} = X \cap C \\ B \cap C = B \setminus X \\ A \setminus (B \cup C) = C \setminus B \end{cases}$	**11**	$\begin{cases} X \setminus C = A \setminus B \\ A \setminus C = \overline{X \cap C} \\ (B \setminus X) \setminus A = A \setminus C \end{cases}$	**12**	$\begin{cases} C \cup X = A \setminus B \\ A \cap B = B \cup C \\ B \setminus A = X \cap C \end{cases}$
13	$\begin{cases} C \setminus X = A \setminus B \\ B \cup \overline{C} = X \cap C \\ X \cup \overline{B} = X \cap B \end{cases}$	**14**	$\begin{cases} B \cup X = C \cap X \\ B \cap X = A \cup X \\ \overline{B} \setminus X = A \setminus B \end{cases}$	**15**	$\begin{cases} B \setminus X = X \setminus C \\ X \setminus B = A \setminus X \\ \overline{C} \cap \overline{X} = X \setminus B \end{cases}$
16	$\begin{cases} B \cap X = C \setminus X \\ X \setminus B = A \cup X \\ X \setminus A = C \cup B \end{cases}$	**17**	$\begin{cases} B \cup X = C \setminus X \\ X \setminus C = A \cup X \\ \overline{B} \setminus A = X \setminus B \end{cases}$	**18**	$\begin{cases} B \cup X = C \Delta \overline{A} \\ X \setminus A = C \cup X \\ \overline{C \cap X} = A \setminus B \end{cases}$

Таблица 1.1.9(окончание)

№	**система**	**№**	**система**	**№**	**система**
19	$\begin{cases} C \setminus A = B \Delta X \\ C \setminus X = B \setminus A \\ A \cap X = B \cap C \end{cases}$	**20**	$\begin{cases} C \setminus X = B \cap A \\ B \setminus X = A \setminus C \\ X \setminus A = B \cup C \end{cases}$	**21**	$\begin{cases} C \cup X = C \cap A \\ B \cup A = A \cap X \\ B \cup C = X \cap A \end{cases}$
22	$\begin{cases} B \cap X = C \cap B \\ A \setminus X = \overline{C \cup B} \\ \overline{B} = B \setminus C \end{cases}$	**23**	$\begin{cases} \overline{C \cap X} = X \cap A \\ A \cap C = C \setminus X \\ B \setminus (C \cup A) = A \setminus C \end{cases}$	**24**	$\begin{cases} X \setminus A = B \setminus C \\ B \setminus A = \overline{X \cap A} \\ (C \setminus X) \setminus B = B \setminus A \end{cases}$
25	$\begin{cases} A \cup X = B \setminus C \\ B \cap C = A \cup C \\ C \setminus B = X \cap A \end{cases}$	**26**	$\begin{cases} A \setminus X = B \setminus C \\ C \cup \overline{A} = A \cap X \\ X \cup \overline{C} = X \cap C \end{cases}$	**27**	$\begin{cases} C \setminus X = X \setminus A \\ X \setminus C = B \setminus X \\ \overline{A \cup X} = X \setminus C \end{cases}$
28	$\begin{cases} C \cup X = A \setminus X \\ X \setminus A = B \cup X \\ \overline{C} \setminus B = X \setminus C \end{cases}$	**29**	$\begin{cases} A \setminus X = C \cap B \\ C \setminus X = B \setminus A \\ X \setminus B = A \cup C \end{cases}$	**30**	$\begin{cases} B \cup X = C \setminus A \\ A \cap C = A \cup B \\ A \setminus C = X \cap B \end{cases}$

Пример решения задания 1.1.9

Решить задание 1.1.9 для системы $\begin{cases} A \Delta X = B \setminus C \\ C \cap X = A \cup X \\ B \setminus X = A \setminus X \end{cases}$

Построим множества общего положения A, B, C, X, являющиеся подмножествами универсального множества U. Для этого выпишем все 16 различных двоичных наборов размерности 4. Пусть разряды этих наборов слева направо соответствуют множествам A, B, C, X (таб.1.1.9).

Символом 1 обозначим список элементов универсального множества U, не попавших ни в одно из множеств A, B, C, X, символом 4 – список элементов, не попавших ни в A, ни в B, но попавших в C и X, и т.д. Будем иметь: $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\}$,

$A = \{9,10,11,12,13,14,15,16\}$, $B = \{5,6,7,8,13,14,15,16\}$,

$C = \{3,4,7,8,11,12,15,16\}$,

$X = \{2,4,6,8,10,12,14,16\}$.

1. $A \Delta X = \{2,4,6,8,9,11,13,15\}$,

$B \backslash C = \{5,6,13,14\}$. Эти множества равны в силу первого уравнения системы, значит, списки элементов 2,4,5,8,9,11,14, и 15 пусты. Получили: $A = \{10,12,13,16\}$,
$B = \{6,7,13,16\}$, $C = \{3,7,12,16\}$,

$X = \{6,10,12,16\}$.

2. $C \cap X = \{12,16\}$,

$A \cup X = \{6,10,12,13,16\}$.

Данные множества равны в силу второго уравнения системы, следовательно, списки элементов 6,10,13 пусты, и наши множества примут вид:
$A = \{12,16\}$, $B = \{7,16\}$,
$X = \{12,16\}$, $C = \{3,7,12,16\}$.

3. $B \backslash X = \{7\}$, $A \backslash X = \varnothing$, в силу третьего уравнения системы получаем, что список 7 пуст, и $C = \{3,12,16\}$, $B = \{16\}$, $A = \{12,16\} = X$, $U = \{1,3,12,16\}$.

Таблица 1.1.9

№	A	B	C	X
1	0	0	0	0
2	0	0	0	1
3	0	0	1	0
4	0	0	1	1
5	0	1	0	0
6	0	1	0	1
7	0	1	1	0
8	0	1	1	1
9	1	0	0	0
10	1	0	0	1
11	1	0	1	0
12	1	0	1	1
13	1	1	0	0
14	1	1	0	1
15	1	1	1	0
16	1	1	1	1

Видим, что $X = A$, $B \subseteq A \subseteq C \subseteq U$.

II. Проверим, что, множество $X = A$ является решением исходной системы.

Если выполнены включения $B \subseteq A \subseteq C \subseteq U$, то можно записать:

$B = \{b\}$, $A = \{a,b\}$, $C = \{a,b,c\}$, $U = \{a,b,c,u\}$, где a,b,c,u - списки элементов.

Пусть $X = A = \{a,b\}$, тогда: $A \Delta X = \varnothing = B \backslash C$, $B \backslash X = \varnothing = A \backslash X$,

$C \cap X = \{a,b\} = A \cup X$.

Видим, что все уравнения системы удовлетворяются, т.е. множество $X = A$ является решением исходной системы при выполнении включений $B \subseteq A \subseteq C \subseteq U$. Ответ: $X = A$, $B \subseteq A \subseteq C \subseteq U$.

Задание 1.1.10

Для произвольных множеств A, B, C, D проверить равносильность систем α и β.

Таблица 1.1.10

№	α	β
1	$\begin{cases} A \cup B \subseteq C \\ C \cup B \subseteq A \cup D \\ C \cup A \subseteq B \cup D \\ A \cap C \subseteq B \end{cases}$	$\begin{cases} \overline{A \cup D} \subseteq A \setminus B \\ B \setminus C \subseteq A \setminus C \\ A \subseteq B \cap C \end{cases}$
2	$\begin{cases} C \cap B \subseteq A \cup D \\ A \cup B \subseteq C \cup D \\ B \cap D \subseteq A \Delta \overline{C} \end{cases}$	$\begin{cases} B \subseteq A \cup D \\ A \subseteq C \cup D \\ (B \cap C) \setminus A \subseteq \overline{C \cup D} \\ (B \cap A) \setminus C \subseteq (B \setminus A) \setminus D \end{cases}$
3	$\begin{cases} A \subseteq B \cup C \\ \overline{B} \subseteq D \subseteq \overline{A} \\ C \cup D \subseteq A \cup B \end{cases}$	$\begin{cases} D \cap A \subseteq C \setminus B \\ D \setminus B \subseteq A \cap D \\ \overline{B} \subseteq B \setminus A \end{cases}$
4	$\begin{cases} A \subseteq B \Delta C \\ C \subseteq B \Delta D \\ A \cap C \subseteq B \setminus D \end{cases}$	$\begin{cases} B \subseteq \overline{C \cap D} \\ C \setminus D \subseteq B \\ A \cap C \subseteq D \\ A \setminus B \subseteq C \cap B \end{cases}$
5	$\begin{cases} A \cap B \subseteq C \cap D \\ A \cap C \subseteq B \cup D \\ A \subseteq B \cup C \end{cases}$	$\begin{cases} A \setminus C \subseteq C \setminus D \\ A \cap B \subseteq C \cap D \\ A \subseteq D \cup \overline{C} \end{cases}$

Таблица 1.1.10(продолжение)

№	α	β
6	$\begin{cases} A\cap D\subseteq B\Delta\overline{C} \\ A\cap B\subseteq C\cup D \\ \overline{D}\subseteq C \end{cases}$	$\begin{cases} C\subseteq D \\ A\setminus C\subseteq A\setminus B \\ A\cap C\subseteq B\cap C \end{cases}$
7	$\begin{cases} A\Delta D\subseteq B\setminus C \\ C\cap D\subseteq A\cup D \\ B\setminus D\subseteq A\setminus D \end{cases}$	$\begin{cases} D\subseteq A\cup B \\ A\subseteq D\cup\overline{C} \\ D\cap C\subseteq A \\ A\setminus D\subseteq B \end{cases}$
8	$\begin{cases} A\cup D\subseteq B\cap D \\ A\cap D\subseteq C\cup D \\ \overline{A}\setminus D\subseteq C\setminus A \end{cases}$	$\begin{cases} C\subseteq D \\ D\subseteq A\cup B \\ A\setminus B\subseteq C\setminus D \\ A\subseteq D \end{cases}$
9	$\begin{cases} A\subseteq C\cup D \\ B\setminus D\subseteq A\setminus C \\ A\cap B\subseteq D\cap C \\ D\subseteq B\cup\overline{A} \end{cases}$	$\begin{cases} A\cap D\subseteq B\cap C\cap D \\ A\cup B\subseteq C\cup D \\ B\subseteq D \end{cases}$
10	$\begin{cases} A\Delta B\subseteq C \\ B\cup D\subseteq A\cup C \\ C\setminus B\subseteq A\setminus D \end{cases}$	$\begin{cases} \overline{C}\subseteq A\cap B \\ D\setminus A\subseteq\overline{C} \\ C\subseteq A\cup B \end{cases}$
11	$\begin{cases} B\cup C\subseteq D \\ D\cup C\subseteq B\cup A \\ D\cup B\subseteq C\cup A \\ B\cap D\subseteq C \end{cases}$	$\begin{cases} \overline{B\cup A}\subseteq B\setminus C \\ C\setminus D\subseteq B\setminus D \\ B\subseteq C\cap D \end{cases}$

Таблица 1.1.10(продолжение)

№	α	β
12	$\begin{cases} D \cap C \subseteq B \cup A \\ B \cup C \subseteq D \cup A \\ C \cap A \subseteq B \Delta \overline{D} \end{cases}$	$\begin{cases} C \subseteq B \cup A \\ B \subseteq D \cup A \\ (C \cap D) \setminus B \subseteq \overline{D \cup A} \\ (C \cap B) \setminus D \subseteq (C \setminus B) \cap \overline{A} \end{cases}$
13	$\begin{cases} B \subseteq C \cup D \\ \overline{C} \subseteq A \subseteq \overline{B} \\ D \cup A \subseteq C \cup B \end{cases}$	$\begin{cases} B \cap A \subseteq D \setminus C \\ A \setminus C \subseteq B \cap A \\ \overline{C} \subseteq C \setminus B \end{cases}$
14	$\begin{cases} B \subseteq C \Delta D \\ D \subseteq C \Delta A \\ B \cap D \subseteq C \setminus A \end{cases}$	$\begin{cases} C \subseteq \overline{D \cap A} \\ D \setminus A \subseteq C \\ B \cap D \subseteq A \\ B \setminus C \subseteq D \cap C \end{cases}$
15	$\begin{cases} C \cap B \subseteq A \cap D \\ B \cap D \subseteq C \cup A \\ B \subseteq D \cup C \end{cases}$	$\begin{cases} B \setminus D \subseteq D \setminus A \\ C \cap B \subseteq A \cap D \\ B \subseteq A \cup \overline{D} \end{cases}$
16	$\begin{cases} A \cap B \subseteq C \Delta \overline{D} \\ C \cap B \subseteq A \cup D \\ \overline{A} \subseteq D \end{cases}$	$\begin{cases} D \subseteq A \\ B \setminus D \subseteq B \setminus C \\ B \cap D \subseteq D \cap C \end{cases}$
17	$\begin{cases} A \Delta B \subseteq C \setminus D \\ A \cap D \subseteq A \cup B \\ C \setminus A \subseteq B \setminus A \end{cases}$	$\begin{cases} A \subseteq C \cup B \\ B \subseteq A \cup \overline{D} \\ A \cap D \subseteq B \\ B \setminus A \subseteq C \end{cases}$

Таблица 1.1.10(продолжение)

№	α	β
18	$\begin{cases} A \cup B \subseteq C \cap A \\ A \cap B \subseteq A \cup D \\ \overline{B} \setminus A \subseteq D \setminus B \end{cases}$	$\begin{cases} D \subseteq A \\ A \subseteq C \cup B \\ B \setminus C \subseteq D \setminus A \\ B \subseteq A \end{cases}$
19	$\begin{cases} B \subseteq A \cup D \\ C \setminus A \subseteq B \setminus D \\ C \cap B \subseteq D \cap A \\ A \subseteq D \cup \overline{B} \end{cases}$	$\begin{cases} A \cap B \subseteq A \cap C \cap D \\ C \cup B \subseteq A \cup D \\ C \subseteq A \end{cases}$
20	$\begin{cases} C \Delta B \subseteq D \\ C \cup A \subseteq B \cup D \\ D \setminus C \subseteq B \setminus A \end{cases}$	$\begin{cases} \overline{D} \subseteq C \cap B \\ A \setminus B \subseteq \overline{D} \\ D \subseteq C \cup B \end{cases}$
21	$\begin{cases} D \cup C \subseteq A \\ D \cup A \subseteq B \cup C \\ A \cup C \subseteq D \cup B \\ C \cap A \subseteq D \end{cases}$	$\begin{cases} \overline{B \cup C} \subseteq C \setminus D \\ D \setminus A \subseteq C \setminus A \\ C \subseteq A \cap D \end{cases}$
22	$\begin{cases} D \cap A \subseteq B \cup C \\ D \cup C \subseteq B \cup A \\ D \cap B \subseteq C \Delta \overline{A} \end{cases}$	$\begin{cases} D \subseteq B \cup C \\ C \subseteq B \cup A \\ (A \cap D) \setminus C \subseteq \overline{B \cup A} \\ (C \cap D) \setminus A \subseteq (D \setminus B) \setminus C \end{cases}$
23	$\begin{cases} C \subseteq A \cup D \\ \overline{D} \subseteq B \subseteq \overline{C} \\ B \cup A \subseteq D \cup C \end{cases}$	$\begin{cases} B \cap C \subseteq A \setminus D \\ B \setminus D \subseteq B \cap C \\ \overline{D} \subseteq D \setminus C \end{cases}$

Таблица 1.1.10(продолжение)

№	α	β
24	$\begin{cases} C \subseteq A \Delta D \\ A \subseteq D \Delta B \\ C \cap A \subseteq D \setminus B \end{cases}$	$\begin{cases} D \subseteq \overline{B \cap A} \\ A \setminus B \subseteq D \\ C \cap A \subseteq B \\ C \setminus D \subseteq D \cap A \end{cases}$
25	$\begin{cases} C \cap D \subseteq A \cap B \\ C \cap A \subseteq D \cup B \\ C \subseteq D \cup A \end{cases}$	$\begin{cases} C \setminus A \subseteq A \setminus B \\ C \cap D \subseteq A \cap B \\ C \subseteq B \cup \overline{A} \end{cases}$
26	$\begin{cases} C \cap B \subseteq D \Delta \overline{A} \\ C \cap D \subseteq A \cup B \\ \overline{B} \subseteq A \end{cases}$	$\begin{cases} A \subseteq B \\ C \setminus A \subseteq C \setminus D \\ C \cap A \subseteq D \cap A \end{cases}$
27	$\begin{cases} C \Delta B \subseteq D \setminus A \\ A \cap B \subseteq C \cup B \\ D \setminus B \subseteq C \setminus B \end{cases}$	$\begin{cases} B \subseteq C \cup D \\ C \subseteq B \cup \overline{A} \\ A \cap B \subseteq C \\ C \setminus B \subseteq D \end{cases}$
28	$\begin{cases} C \cup B \subseteq D \cap B \\ C \cap B \subseteq A \cup B \\ \overline{C} \setminus B \subseteq A \setminus C \end{cases}$	$\begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq C \cup D \\ C \setminus D \subseteq A \setminus B \\ C \subseteq B \end{cases}$
29	$\begin{cases} C \subseteq A \cup B \\ D \setminus B \subseteq C \setminus A \\ C \cap D \subseteq B \cap A \\ B \subseteq A \cup \overline{C} \end{cases}$	$\begin{cases} C \cap B \subseteq B \cap D \cap A \\ D \cup C \subseteq B \cup A \\ D \subseteq B \end{cases}$

Таблица 1.1.10(окончание)

№	α	β
30	$\begin{cases} C \Delta D \subseteq A \\ D \cup B \subseteq C \cup A \\ A \setminus D \subseteq C \setminus B \end{cases}$	$\begin{cases} \overline{A} \subseteq C \cap D \\ B \setminus C \subseteq \overline{A} \\ A \subseteq C \cup D \end{cases}$

Пример решения задания 1.1.10

Проверить равносильность систем

$$\begin{cases} B \cap D \subseteq A \cap C \\ B \cap A \subseteq D \cup C \\ B \subseteq D \cup A \end{cases} (*) \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} B \setminus A \subseteq A \setminus C \\ B \cap D \subseteq A \cap C \\ B \subseteq C \cup \overline{A} \end{cases} (**).$$

I. Возьмём множества общего положения $A, B, C, D,$ являющиеся подмножествами универсального множества $U,$ воспользовавшись техникой, описанной в решении примера 1.1.9. Будем иметь:

$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\}$,

$A = \{9,10,11,12,13,14,15,16\}$, $B = \{5,6,7,8,13,14,15,16\}$,

$C = \{3,4,7,8,11,12,15,16\}$, $D = \{2,4,6,8,10,12,14,16\}$.

1. Рассмотрим включения, вошедшие в систему (∗).

$B \cap D = \{6,8,14,16\}$, $A \cap C = \{11,12,15,16\}$.

По условию, $\{6,8,14,16\} \subseteq \{11,12,15,16\}$ $\Rightarrow$ список 6,8,14 пуст,

Значит, $A = \{9,10,11,12,13,15,16\}$, $B = \{5,7,13,15,16\}$,

$C = \{3,4,7,11,12,15,16\}$, $D = \{2,4,10,12,16\}$.

$B \cap A = \{13,15,16\}$, $D \cup C = \{2,3,4,7,10,11,12,15,16\}$.

Так как $\{13,15,16\} \subseteq \{2,3,4,7,10,11,12,15,16\}$, то $\{13\}=\varnothing$.

Множества A и B можно записать так:

$A = \{9,10,11,12,15,16\}$, $B = \{5,7,15,16\}$.

И, наконец, $B \subseteq D \cup A$, то есть

$\{5,7,15,16\} \subseteq \{2,4,9,10, 11,12,15,16\} \Rightarrow \{5,7\} = \varnothing$.

Итак, множества A, B, C и D таковы: $A = \{9,10,11,12,15,16\}$,

$B = \{15,16\}$, $C = \{3,4,11,12,15,16\}$, $D = \{2,4,10,12,16\}$.

Проверим при полученных A, B, C и D выполнение включений $(**)$:

$B \backslash A = \varnothing$, поэтому включение $B \backslash A \subseteq A \backslash C$ выполняется независимо от вида множества $A \backslash C$.

$B \cap D = \{16\}$, $A \cap C = \{11,15,16\}$, значит, $B \cap D \subseteq A \cap C$ и второе включение также выполнено.

Наконец, $\overline{A} = \{1,2,3,5,6,7,8,13,14\}$,

$C \cup \overline{A} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,11, 12,13,14,15,16\}$ и $B \subseteq C \cup \overline{A}$.

Получили, что все множества A, B, C и D, удовлетворяющие системе включений $(*)$ удовлетворяют также системе $(**)$.

2. Пусть теперь выполняется система $(**)$.

Также, как и в первой части доказательства, возьмём множества

$U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}\}$,

$A = \{x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}\}$, $B = \{x_5, x_6, x_7, x_8, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}\}$,

$C = \{x_3, x_4, x_7, x_8, x_{11}, x_{12}, x_{15}, x_{16}\}$, $D = \{x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}, x_{12}, x_{14}, x_{16}\}$.

$B \backslash A = \{x_5, x_6, x_7, x_8\}$, $\{$ $A \backslash C = \{x_9, x_{10}, x_{13}, x_{14}\}$, и из выполнения включения $B \backslash A \subseteq A \backslash C$ следует, что $\{x_5, x_6, x_7, x_8\} = \varnothing$.

Рассматриваемые множества примут вид:

$U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}\}$,

$A = \{x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}\}$, $B = \{x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}\}$,

$C = \{x_3, x_4, x_{11}, x_{12}, x_{15}, x_{16}\}$, $D = \{x_2, x_4, x_{10}, x_{12}, x_{14}, x_{16}\}$.

$B \cap D = \{x_{14}, x_{16}\}$, $A \cap C = \{x_{11}, x_{12}, x_{15}, x_{16}\}$.

Из включения $B \cap D \subseteq A \cap C$ следует, что $\{x_{14}\} = \varnothing$, значит,

$U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{15}, x_{16}\}$,

$A = \{x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{15}, x_{16}\}$, $B = \{x_{13}, x_{15}, x_{16}\}$,

$C = \{x_3, x_4, x_{11}, x_{12}, x_{15}, x_{16}\}$, $D = \{x_2, x_4, x_{10}, x_{12}, x_{16}\}$.

$\overline{A} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$,

$C \cup \overline{A} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{11}, x_{12}, x_{15}, x_{16}\}$,

Из включения $B \subseteq C \cup \overline{A}$ следует, что $\{x_{13}\} = \varnothing$, значит,

$U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{15}, x_{16}\}$,

$A = \{x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{15}, x_{16}\}$, $B = \{x_{15}, x_{16}\}$,

$C = \{x_3, x_4, x_{11}, x_{12}, x_{15}, x_{16}\}$, $D = \{x_2, x_4, x_{10}, x_{12}, x_{16}\}$.

Проверим для этих множеств выполнение включений системы (∗): $B \cap D = \{x_{16}\}$, $\{ A \cap C = \{x_{11}, x_{12}, x_{15}, x_{16}\}$ и включение

$B \cap D \subseteq A \cap C$ выполнено.

$\{ B \cap A = \{x_{15}, x_{16}\}$, $\{ D \cup C = \{x_2, x_3, x_4, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{15}, x_{16}\}$, включение $B \cap A \subseteq D \cup C$ выполнено.

И, наконец, $D \cup A = \{x_2, x_4, x_9 x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{15}, x_{16}\}$ и $B \subseteq D \cup A$ также верно.

Итак, доказано, что системы (∗) и (∗∗) равносильны.

1.2. Графики

Декартовым произведением множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется множество $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$

Проекцией вектора $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ на ось i называется координата a_i.

Проекцией множества A векторов на ось будем называть множество проекций векторов из A на эту ось.

Графиком будем называть подмножество декартова произведения двух множеств.

Инверсией графика P будем называть график

$$P^{-1} = \{(a,b) \mid (b,a) \in P).$$

Композицией графиков P и Q называется график

$$P \circ Q = \{(a,b) \mid \exists_x ((a,x) \in P \text{ и } (x,b) \in Q)\}.$$

Задание 1.2.1

1. Проверить справедливость равенства α для множеств
$A = \{1,2\}, \quad B = \{2,3\}, \; C = \{1,3\}$.

2. Выяснить, верно ли равенство α для произвольных A, B, C.

Таблица 1.2.1

№	α
1	$A \times C = (A \times (C \setminus B)) \cup (A \times (C \cap B))$
2	$A \times C = (A \times (C \cap B)) \cup (A \times C)$
3	$A \times (B \Delta C) = (A \times (B \cup C) \setminus (A \times (C \cap B))$
4	$A \times C = (A \times (C \setminus B)) \cup (A \times C)$
5	$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times (C \setminus B))$
6	$A \times (C \setminus B) = (A \times C) \Delta (A \times (C \cap B))$
7	$A \times C = (A \times (C \cup B)) \cap (A \times C)$
8	$A \times (C \cap (B \Delta C)) = (A \times C) \Delta (A \times (C \cap B))$
9	$A \times (C \setminus B) = (A \times C) \setminus (A \times (C \cap B))$

10	$A\times(B\cup C)=(A\times(B\Delta C))\cup(A\times(B\cap C))$

Таблица 1.2.1(окончание)

№	α
11	$A\times C=(A\times(C\cup B))\setminus(A\times(B\setminus C))$
12	$A\times(B\cap C)=(A\times C)\setminus(A\times(C\setminus B))$
13	$A\times(B\cap C)=(A\times(B\cup C))\setminus(A\times(B\Delta C))$
14	$A\times(C\setminus B)=(A\times(B\cup C))\setminus(A\times B)$
15	$B\times A=(B\times(A\setminus C))\cup(B\times(A\cap C))$
16	$B\times A=(B\times(A\cap C))\cup(B\times A)$
17	$B\times A=(B\times A)\cup(B\times(A\setminus C))$
18	$B\times(A\cup C)=(B\times(A\setminus C))\cup(B\times C)$
19	$B\times A=(B\times A)\cap(B\times(A\cup C))$
20	$B\times(A\setminus C)=(B\times A)\setminus(B\times(A\cap C))$
21	$B\times A=(B\times(A\cup C))\setminus(B\times(C\setminus A))$
22	$B\times(A\cap C)=(B\times A)\setminus(B\times(A\setminus C))$
23	$B\times(A\setminus C)=(B\times A)\Delta(B\times(A\cap C))$
24	$B\times(A\setminus C)=(B\times(A\cup C))\setminus(B\times C)$
25	$C\times B=(C\times(B\setminus A))\cup(C\times(B\cap A))$
26	$C\times B=(C\times(B\cap A))\cup(C\times B)$
27	$C\times(A\Delta B)=(C\times(A\cup B)\setminus(C\times(A\cap B))$
28	$C\times B=(C\times(B\setminus A))\cup(C\times B)$
29	$C\times(A\cup B)=(C\times A)\cup(C\times(B\setminus A))$
30	$C\times(\grave{A}\setminus B)=(C\times A)\Delta(C\times(A\cap B))$

Пример решения задания 1.2.1

1. Проверить справедливость равенства

$C\times(B\setminus A)=(C\times B)\Delta(C\times(A\cap B))$ *для множеств*

$A=\{1,2\},\quad B=\{2,3\},\ C=\{1,3\}$.

2. Выяснить, верно ли равенство

$C\times(B\setminus A)=(C\times B)\Delta(C\times(A\cap B))$ *для произвольных* $A,\ B,\ \tilde{N}.$

1. Для нашего случая
$C\times(B\setminus A)=\{1,3\}\times(\{2,3\}\setminus\{1,2\})=\{1,3\}\times\{3\}=\{(1,3),(3,3)\}$.
$C\times(A\cap B)=\{1,3\}\times(\{1,2\}\cap\{2,3\})=\{1,3\}\times\{2\}=\{(1,2),(3,2)\}$.
$C\times B=\{1,3\}\times\{2,3\}=\{(1,3),(1,2),(3,2),(3,3)\}$. $(C\times B)\Delta(C\times(A\cap B))=$
$=\{(1,3),(1,2),(3,2),(3,3)\}\Delta\{(1,2),(3,2)\}=\{(1,3),(3,3)\}$. Итак, мы убедились, что в нашем примере равенство выполнено. Проверим это для общего случая.

2. Пусть $A=\{a,d\}$, $B=\{b,d\}$, $C=\{c\}$, где a,b,c,d – списки элементов.

Тогда $C\times(B\setminus A)=\{c\}\times\{b\}=\{(c,b)\}$, где $\{(c,b)\}$ – множество пар элементов, первая компонента которых входит в список c, а вторая – в список b.

$A\cap B=\{d\}$, $(C\times B)\Delta(C\times(A\cap B))=\{(c,b),(c,d)\}\Delta\{(c,d)\}=\{(c,b)\}$.

Как видно, множества $C\times(B\setminus A)$ и $(C\times B)\Delta(C\times(A\cap B))$ состоят из пар одинакового вида, следовательно, равенство

$C\times(B\setminus A)=(C\times B)\Delta(C\times(A\cap B))$ для произвольных $A,\ B,\ \tilde{N}.$

Задание 1.2.2

Для данного графика P найти : P^{-1}, $P\circ P$, $P^{-1}\circ P$,

$\text{пр}_2(P^{-1}\circ P)\times\text{пр}_1(P\circ P)$.

Таблица 1.2.2

№	*P*
1	(1,2), (1,3), (4,2), (2,3), (3,3)
2	(2,2), (4,4), (1,2), (3,1), (3,4)
3	(1,2), (2,3), (3,1), (2,2), (3,2)
4	(3,3), (3,2), (2,2), (1,2), (3,1)
5	(0,1), (1,1), (1,0), (0,2), (2,1)
6	(5,4), (2,4), (4,4), (3,2), (5,3)
7	(1,1), (1,2), (2,3), (3,1), (3,2)

8	(1,3), (3,1), (2,2), (1,2), (1,4)
9	(3,8), (8,4), (4,4), (8,3), (4,3)
10	(0,2), (2,3), (3,3), (3,0), (0,0)

Таблица 1.2.2(окончание)

№	***P***
11	(1,5), (5,2), (2,2), (1,1), (1,3)
12	(0,2), (0,3), (0,0), (1,2), (2,3)
13	(a,b), (a,c), (d,b), (c,c), (b,c)
14	(b,b), (d,d), (a,b), (c,a), (c,d)
15	(a,b), (b,c), (c,a), (b,b), (c,b)
16	(c,c), (c,b), (b,b), (a,b), (c,a)
17	(e,a), (a,a), (a,e), (e,b), (b,a)
18	(f,d), (b,d), (d,d), (c,b), (f,c)
19	(a,a), (a,b), (b,c), (c,a), (c,b)
20	(a,c), (c,a), (b,b), (a,b), (a,d)
21	(c,g), (g,d), (d,d), (g,c), (d,c)
22	(e,b), (b,c), (c,c), (c,e), (e,e)
23	(a,f), (f,b), (b,b), (a,a), (a,c)
24	(e,b), (e,c), (e,e), (a,b), (b,c)
25	(x,y), (x,z), (t,y), (z,z), (y,z)
26	(y,y), (t,t), (x,y), (z,x), (z,t)
27	(x,y), (y,z), (z,x), (y,y), (z,y)
28	(z,z), (z,y), (y,y), (x,y), (z,x)
29	(t,x), (x,x), (x,t), (t,y), (y,x)
30	(w,t), (y,t), (t,t), (z,y), (w,z)

Пример решения задания 1.2.2

Для данного графика $P=\{(1,1),(1,2),(2,3),(2,2)\}$ *найти* : P^{-1}, $P\circ P$, $P^{-1}\circ P$, $\text{пр}_2(P^{-1}\circ P)\times\text{пр}_1(P\circ P)$.

По определению инверсии, $(2,1) \in P^{-1}$, так как $(1,2) \in P$.

И так далее, получаем : $P^{-1} = \{(1,1),(2,1),(3,2),(2,2)\}$.

По определению композиции, $(1,3) \in P \circ P$, так как существует 2, причём $(1,2) \in P$ и $(2,3) \in P$. Продолжая дальше строить композицию, получим: $P \circ P = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(2,2)\}$.

Аналогично получаем

$P^{-1} \circ P = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,3)\}$.

Вспоминая определение проекции множества векторов на ось, получим: $\text{пр}_2 (P^{-1} \circ P) = \{1,2,3\}$, аналогично найдём другую проекцию: $\text{пр}_1 (P \circ P) = \{1,2\}$, и, наконец, можем написать:

$\text{пр}_2 (P^{-1} \circ P) \times \text{пр}_1 (P \circ P) = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$.

Задание 1.2.3

Для данных графиков P и T решить относительно графика X уравнение $X \circ P = T$ при условии, что $|X| = 6$, $\text{пр}_1 X = \text{пр}_2 X = \{1,2,3,4,5,6\}$. Для каждого найденного X указать $P \circ X$.

Таблица 1.2.3

№	P	T
1	(6,4), (2,4), (5,5), (3,2), (4,1)	(2,5), (3,2), (1,4), (6,1), (4,4)
2	(2,4), (3,3), (4,1), (5,6), (6,4)	(6,3), (1,4), (5,6), (4,4), (2,1)
3	(2,4), (3,2), (4,1), (5,5), (6,4)	(2,5), (4,4), (3,2), (1,4), (6,1)
4	(1,2), (4,1), (2,6), (5,5), (3,2)	(2,2), (1,5), (4,1), (6,2), (3,6)
5	(1,5), (6,6), (2,3), (3,5), (5,4)	(2,3), (1,4), (3,6), (4,5), (5,5)
6	(3,3), (6,1), (2,1), (5,2), (1,4)	(2,3), (4,1), (6,4), (1,1), (5,2)
7	(3,1), (6,5), (5,3), (2,2), (4,3)	(3,3), (4,1), (1,3), (6,5), (5,2)
8	(6,2), (4,4), (3,6), (2,5), (1,2)	(6,4), (3,6), (1,5), (5,2), (2,2)
9	(2,4), (5,5), (4,6), (3,4), (1,3)	(2,6), (4,4), (6,4), (1,3), (3,5)
10	(4,2), (5,2), (1,4), (2,3), (6,6)	(2,2), (5,3), (1,4), (4,6), (3,2)
11	(6,3), (5,6), (2,2), (3,4), (1,3)	(4,3), (5,6), (3,3), (6,2), (1,4)
12	(2,1), (1,3), (4,2), (6,1), (5,5)	(2,5), (3,1), (4,2), (6,3), (1,1)

13	(2,2), (1,4), (3,6), (4,5), (6,4)	(3,6), (1,5), (5,4), (4,4), (6,2)
14	(5,1), (1,4), (3,3), (4,2), (6,4)	(4,4), (1,3), (5,1), (2,4), (6,2)
15	(4,2), (3,2), (5,3), (2,1), (6,6)	(3,6), (1,2), (5,3), (4,1), (2,2)
16	(6,1), (1,3), (2,2), (5,1), (4,6)	(1,1), (4,6), (5,3), (3,1), (6,2)

Таблица 1.2.3(окончание)

№	**P**	**T**
17	(1,5), (2,5), (4,1), (5,3), (6,6)	(2,3), (3,5), (5,5), (1,6), (4,1)
18	(2,6), (6,3), (4,4), (1,2), (5,6)	(6,6), (2,4), (5,3), (1,2), (3,6)
19	(4,3), (5,4), (2,2), (1,3), (3,6)	(6,3), (1,6), (5,4), (3,3), (4,2)
20	(2,2), (4,1), (3,4), (5,3), (6,4)	(6,1), (4,4), (5,3), (1,4), (3,2)
21	(4,5), (5,2), (6,4), (3,3), (1,5)	(2,5), (1,2), (5,5), (4,3), (6,4)
22	(3,1), (4,4), (6,1), (2,3), (1,5)	(1,1), (5,1), (6,5), (2,3), (3,4)
23	(1,5), (5,2), (3,1), (6,6), (4,5)	(4,2), (1,6), (3,1), (5,5), (2,5)
24	(2,2), (6,4), (1,3), (3,6), (5,6)	(1,3), (3,2), (4,5), (5,4), (6,6)
25	(6,4), (3,5), (4,3), (1,1), (2,3)	(4,1), (6,4), (3,3), (2,5), (5,3)
26	(2,6), (4,1), (3,3), (6,1), (1,5)	(4,5), (1,1), (2,6), (6,3), (5,1)
27	(1,6), (5,5), (2,1), (4,6), (6,3)	(4,3), (1,5), (6,6), (3,6), (2,1)
28	(3,4), (2,5), (1,1), (4,2), (6,2)	(6,5), (2,2), (5,2), (4,1), (3,4)
29	(5,5), (2,1), (6,3), (3,4), (1,3)	(3,3), (2,1), (4,3), (1,5), (6,4)
30	(4,1), (3,1), (6,4), (2,2), (1,5)	(5,1), (4,2), (3,5), (1,1), (6,4)

Пример решения задания 1.2.3

Для данных графиков $P = \{(5,3),(1,3),(4,4,),(2,1),(3,6)\}$ и

$T = \{(1,4),(2,1),(6,3),(5,6),(3,3)\}$ *решить относительно графика* X *уравнение* $X \circ P = T$ *при условии, что* $|X| = 6$, *пр*$_1 X$ = *пр*$_2 X$ = $=\{1,2,3,4,5,6\}$. *Для каждого найденного* X *указать* $P \circ X$.

Для каждой пары $(a,b) \in T$ ищем пару $(x,b) \in P$. Если такая пара существует, то (a,x) может принадлежать графику X.

Запишем множество A, составленное из пар вида (a,x):

$A = \{(1,4),(2,2),(6,1),(6,5),(5,3),(3,1),(3,5)\}$.

Так как $4 \in$пр$_2 X$, то пара $(4,x) \in X$. Очевидно, что $x = 6$, так как иначе в графике T нашлась бы пара, начинающаяся на 4.

Составим X, добавляя к паре (4,6) пары из графика A так, чтобы выполнилось условие задачи. Получим:

$X_1 = \{(1,4),(2,2),(6,1),(5,3),(3,5),(4,6)\}$,

$X_2 = \{(1,4),(2,2),(6,5),(5,3),(3,1),(4,6)\}$.

Проверкой убеждаемся в том, что X_1 и X_2 являются решениями исходного уравнения. Согласно определения композиции, выпишем $P \circ X_1$ и $P \circ X_1$: $P \circ X_1 = \{(1,5),(2,4),(3,1),(4,6),(5,5)\}$,

$P \circ X_2 = \{(1,1),(2,4),(3,5),(5,1),(4,6)\}$.

Задание 1.2.4

Для графиков P и T из соотношения $P \circ X = T$ найти график X наименьшей возможной мощности.

Таблица 1.2.4

№	*P*	*T*
1	$(a,b),(a,c),(b,b),(c,b)$	$(a,a),(a,c),(a,b),(b,a),(b,c),(c,a),(c,c)$
2	$(a,b),(b,c),(c,c),(c,b)$	$(a,c),(b,a),(b,b),(c,a),(c,b),(c,c)$
3	$(b,a),(b,c),(a,c)$	$(b,b),(b,c),(b,a),(a,b),(a,a)$
4	$(a,b),(c,b),(a,c),(c,c)$	$(a,a),(a,c),(c,a),(c,c),(a,b),(c,b)$
5	$(c,b),(a,b),(a,c)$	$(c,c),(c,a),(c,b),(a,c),(a,a),(a,b)$
6	$(b,c),(b,a),(c,c),(a,c)$	$(b,b),(b,a),(b,c),(c,b),(b,a),(a,b),(a,a)$
7	$(b,c),(c,a),(a,a),(a,c)$	$(b,a),(c,b),(c,c),(a,b),(a,c),(a,a)$
8	$(c,b),(c,a),(b,a)$	$(c,c),(c,a),(c,b),(b,c),(b,b)$
9	$(b,c),(a,c),(b,a),(a,a)$	$(b,b),(b,a),(a,b),(a,a),(b,c),(a,c)$
10	$(a,c),(b,c),(b,a)$	$(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c)$
11	$(c,a),(c,b),(a,a),(b,a)$	$(c,c),(c,b),(c,a),(a,c),(a,b),(b,c),(b,b)$
12	$(c,a),(a,b),(b,b),(b,a)$	$(c,b),(a,c),(a,a),(b,c),(b,a),(b,b)$
13	$(a,c),(a,b),(c,b)$	$(a,a),(a,b),(a,c),(c,a),(c,c)$
14	$(c,a),(b,a),(c,b),(b,b)$	$(c,c),(c,b),(b,c),(b,b),(c,a),(b,a)$
15	$(a,b),(c,b),(c,a)$	$(a,a),(a,c),(a,b),(c,a),(c,c),(c,b)$
16	$(c,b),(c,a),(b,b),(a,b)$	$(c,c),(c,a),(c,b),(b,c),(b,a),(a,c),(a,a)$
17	$(c,b),(b,a),(a,a),(a,b)$	$(c,a),(b,c),(b,b),(a,c),(a,b),(a,a)$
18	$(b,c),(b,a),(c,a)$	$(b,b),(b,a),(b,c),(c,b),(c,c)$

19	$(c,b),(a,b),(c,a),(a,a)$	$(c,c),(c,a),(a,c),(a,a),(c,b),(a,b)$
20	$(b,c),(a,c),(a,b)$	$(b,b),(b,a),(b,c),(a,b),(a,a),(a,c)$
21	$(a,c),(a,b),(c,c),(b,c)$	$(a,a),(a,b),(a,c),(c,a),(c,b),(b,a),(b,b)$

Таблица 1.2.4(окончание)

№	***P***	***T***
22	$(a,c),(c,b),(b,b),(b,c)$	$(a,b),(c,a),(c,c),(b,a),(b,c),(b,b)$
23	$(c,a),(c,b),(a,b)$	$(c,c),(c,b),(c,a),(a,c),(a,a)$
24	$(a,c),(b,c),(a,b),(b,b)$	$(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(a,c),(b,c)$
25	$(c,a),(b,a),(b,c)$	$(c,c),(c,b),(c,a),(b,c),(b,b),(b,a)$
26	$(b,a),(b,c),(a,a),(c,a)$	$(b,b),(b,c),(b,a),(a,b),(a,c),(c,b),(c,c)$
27	$(b,a),(a,c),(c,c),(c,a)$	$(b,c),(a,b),(a,a),(c,b),(c,a),(c,c)$
28	$(a,b),(a,c),(b,c)$	$(a,a),(a,c),(a,b),(b,a),(b,b)$
29	$(b,a),(c,a),(b,c),(c,c)$	$(b,b),(b,c),(c,b),(c,c),(b,a),(c,a)$
30	$(a,b),(a,a),(c,a)$	$(a,a),(a,c),(a,b),(c,c),(c,b),(c,a)$

Пример решения задания 1.2.4

Для графиков $P=\{(b,a),(c,a),(c,b)\}$ *и* $T=\{(b,b),(b,c),(b,a),(c,b),(c,c),(c,a)\}$ *из соотношения* $P\circ X=T$ *найти график* X *наименьшей возможной мощности.*

Найдём инверсию графика P: $P^{-1}=\{(a,b),(a,c),(b,c)\}$.

Пусть X – график наименьшей мощности, являющийся решением уравнения $P\circ X=T$. Из определения композиции графиков и минимальности X следует, что $\text{пр}_2 P=\text{пр}_1 X=\{a,b\}$.

Найдём композицию графика P^{-1} с левой и правой частями равенства $P\circ X=T$. Получим:

$\{(a,b),(a,c),(b,c)\}\circ\{(b,a),(c,a),(c,b)\}\circ X=P^{-1}\circ T$, или

$\{(a,a),(b,b),(a,b),(b,a)\}\circ X=P^{-1}\circ T$, откуда

$\{(a,a),(b,b)\}\circ X\cup\{(a,b),(b,a)\}\circ X=P^{-1}\circ T$.

Из равенства $\text{пр}_2 P = \text{пр}_1 X = \{a,b\}$ и определения композиции графиков следует, что $\{(a,a),(b,b)\} \circ X = X$.

Значит, верно равенство $X \cup \{(a,a),(b,b)\} \circ X = P^{-1} \circ T$.

Итак, график $P^{-1} \circ T$ кроме пар графика X может содержать также пары графика $\{(a,a),(b,a)\} \circ X$, не попавшие в X . Выпишем все пары, попавшие в график $P^{-1} \circ T$.

$P^{-1} \circ T = \{(a,b),(a,c),(b,c)\} \circ \{(b,b),(b,c),(b,a),(c,b),(c,c),(c,a)\} =$

$= \{(a,b),(a,c),(a,a),(b,b),(b,c),(b,a)\}$.

Выберем из этого графика пары, образующие X .

Для этого изобразим таблицу, в заголовках столбцов выписав пары графика $P^{-1} \circ T$, а в заголовках строк – пары графика T (таб.1.2.4а)

Таблица 1.2.4а

$P^{-1} \circ T$ / T	*ab*	*ac*	*aa*	*bb*	*bc*	*ba*
bb	*					
bc		*				
ba			*			
cb	*			*		
cc		*			*	
ca			*			*

Для каждой пары $(u,v) \in P^{-1} \circ T$ звёздочкой отметим пары из T, попавшие в композицию $P^{-1} \circ \{(u,v)\}$. Далее, выберем наименьшее число столбцов таблицы так, чтобы для любой строки в выбранном наборе нашёлся столбец, имеющий символ “*” в данной строке, причём $P^{-1} \circ \{(u,v)\}$ не должен иметь пар, не входящих в T.

В нашем примере видно, что такой набор образуют столбцы, помеченные комбинациями ab, ac, aa, следовательно, $X = \{ab, ac, aa\}$.

1.3. Соответствия

Соответствием между множествами X и Y будем называть тройку объектов: $\Gamma = (X,Y,G)$, где X - *область отправления* соответствия, Y - *область прибытия* соответствия, G - *график* соответствия, причём $G \subseteq X \times Y$.

Областью определения соответствия будем называть $\text{пр}_1 G$.

Областью значений соответствия будем называть $\text{пр}_2 G$.

Соответствие называется *всюду определённым*, если $\text{пр}_1 G = X$.

Соответствие называется *сюръективным*, если $\text{пр}_2 G = Y$.

Соответствие будем называть *функциональным*, или *функцией*, если его график не содержит пар с одинаковыми первыми и различными вторыми координатами.

Соответствие называется *инъективным*, если его график не содержит пар с одинаковыми вторыми и различными первыми координатами.

Соответствие называется *отображением* X *в* Y, если оно всюду определено и функционально.

Соответствие называется *отображением* X *на* Y, если оно всюду определено, функционально и сюръективно.

Соответствие называется *взаимно - однозначным*, если оно функционально и инъективно.

Соответствие называется *биекцией*, если оно всюду определено, сюръективно, функционально и инъективно.

Образом множества A при данном соответствии называется множество $\Gamma(A) = \{y \mid (x,y) \in G \text{ и } x \in A\}$.

Прообразом множества B при данном соответствии называется множество $\Gamma^{-1}(B) = \{x \mid (x,y) \in G \text{ и } y \in B\}$.

Множества называются *равномощными*, если между ними можно установить биекцию.

Множество называется *счётным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел.

Множество называется *континуальным*, если оно равномощно множеству действительных чисел отрезка [0,1].

Задание 1.3.1

Дано соответствие $\Gamma = (X, Y, G)$.

1. Изобразить соответствие в виде графа.

2. Выяснить, какими из 4 основных свойств (всюду определённость, сюръективность, функциональность, инъективность) обладает Γ.

3. Найти образ множества A и прообраз множества B при данном соответствии.

4. Построить соответствие между бесконечными множествами, обладающее тем же набором свойств, что и $\tilde{A}$.

5. Построить соответствие между конечными множествами, обладающее набором свойств, противоположным данному.

Замечание. Для данного и построенных соответствий отметить случаи отображений, указать их тип, отметить случаи биекций.

Таблица 1.3.1

№	X	Y	G	A	B
1	a,b,c,d,e	1,2,3	$(a,2),(b,3),(c,1),(d,2),(e,1)$	e,c	2,3
2	a,b,c,d	1,2,3,4	$(a,4),(b,3),(c,2),(d,1)$	a,b	1,3
3	a,b,c,d	1,2,3,4,5	$(a,3),(b,5),(c,4),(d,1)$	a,c	1,4
4	a,b,c,d,e	1,2,3,4	$(d,1),(b,2),(e,4),(a,3)$	b,c	1,2
5	a,b,c,d,e	1,2,3	$(b,2),(c,1),(e,3),(a,3)$	e,c	3,1
6	a,b,c,d	1,2,3,4	$(a,2),(b,3),(c,1),(a,4)$	a,b	1,2
7	a,b,c,d,e	1,2,3,4,5	$(a,5),(b,3),(d,1),(e,2)$	d,e	1,3
8	a,b,c,d	1,2,3,4	$(a,3),(b,4),(c,3),(d,1)$	a,c	1,3
9	a,b,c	1,2,3,4,5	$(a,2),(b,1),(c,5),(a,3)$	a,b	3,4
10	a,b,c	1,2,3	$(a,1),(a,3),(b,2),(c,3)$	a,c	2,3
11	a,b,c,d	1,2,3,4,5	$(a,2),(c,1),(d,5),(c,3)$	b,c	1,2
12	a,b,c,d,e	1,2,3,4	$(b,1),(c,3),(d,2),(c,1)$	a,c	1,2
13	a,b,c,d	1,2,3	$(a,1),(b,1),(c,3),(b,2)$	b,d	1,3

Таблица 1.3.1(окончание)

№	X	Y	G	A	B
14	a,b,c,d	1,2,3,4	$(a,4),(b,3),(b,2),(c,3),(d,4)$	a,b	3,4
15	a,b,c,d	1,2,3,4	$(a,4),(c,4),(b,2),(a,3)$	a,b	2,4
16	a,b,c,d,e	1,2,3	$(a,2),(b,1),(d,3),(e,1)$	a,b	1,2
17	a,b,c,d	1,2,3,4	$(b,3),(a,2),(c,2),(d,1)$	a,c	1,4
18	a,b,c,d	1,2,3,4	$(a,3),(c,2),(d,1),(c,4)$	c,d	2,3
19	a,b,c	1,2,3,4,5	$(a,2),(b,5),(c,4),(b,3)$	a,b	2,5
20	a,b,c,d	1,2,3,4	$(a,1),(b,3),(a,2),(c,4)$	a,b	2,3
21	a,b,c,d	1,2,3	$(a,3),(b,3),(c,1),(d,2)$	c,d	1,3
22	a,b,c,d	1,2,3	$(a,1),(b,3),(c,2),(a,2)$	c,d	2,3
23	a,b,c,d	1,2,3,4	$(a,3),(b,4),(c,1),(d,2)$	a,b	1,4
24	a,b,c	1,2,3,4	$(a,3),(b,1),(c,2),(c,1)$	a,c	4,2
25	a,b,c,d,e	1,2,3	$(c,2),(d,1),(a,3),(b,3)$	a,d	3,1
26	a,b,c,d	1,2,3,4	$(b,2),(c,3),(d,1),(b,4)$	b,c	1,2
27	a,b,c,d,e	1,2,3,4,5	$(b,5),(c,3),(e,1),(a,2)$	a,e	1,3
28	a,b,c,d	1,2,3,4	$(b,3),(c,4),(d,3),(a,1)$	b,d	3,1
29	a,b,c	1,2,3,4,5	$(b,2),(c,1),(a,5),(b,3)$	b,c	4,3
30	a,b,c	1,2,3	$(b,1),(b,3),(c,2),(a,3)$	a,b	2,3

Пример решения задания 1.3.1

Решим задание 1.3.1 для соответствия $\Gamma = (X,Y,G)$, *если* $X = \{a,b,c,d\}$,

$Y = \{1,2,3,4,5\}$, $G = \{(a,2),(b,1),(b,5),(d,4)\}$, $A = \{a,b\}$, $B = \{3,4\}$.

1. Изобразим соответствие в виде графа (рис.1.3.1а):

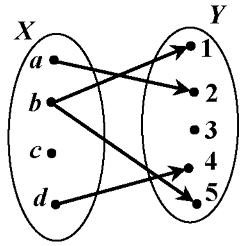


Рис.1.3.1а

2. Выясним, какими из свойств обладает данное соответствие.

α) Соответствие не всюду определено, так как $\text{пр}_1 G = \{a,b,d\} \neq X$.

β) Соответствие не сюръективно, так как $\text{пр}_2 G = \{1,2,4,5\} \neq Y$.

γ) Соответствие не функционально, так как его график содержит две пары $(b,1)$ и $(b,5)$ с одинаковыми первыми и различными вторыми координатами.

δ) Соответствие инъективно, так как его график G не содержит пар с одинаковыми вторыми и различными первыми координатами.

3. Найдём образ $\Gamma(A)$ и прообраз $\Gamma^{-1}(B)$.

$\Gamma(A) = \{1,2,5\}$, так как $A = \{a,b\}$ и $\{(a,2),(b,1),(b,5)\} \subseteq G$.

$\Gamma^{-1}(B) = \{d\}$, так как $B = \{3,4\}$ и только $(d,4) \in G$.

4. Построим соответствие между бесконечными множествами, обладающее тем же набором свойств, что и данное соответствие.

Пусть $X = [0,2]$, $Y = (-\infty,+\infty)$, $G = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ и } x \geq 0\}$

Покажем, что это соответствие (рис.1.3.1.б) обладает тем же набором свойств, что и данное.

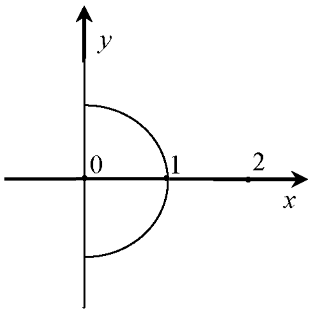


Рис. 1.3.1б

α) Построенное соответствие не всюду определено, так как $\text{пр}_1 G = [0,1] \neq X$.

β) Построенное соответствие не сюръективно, так как $\text{пр}_2 G = [-1,1] \neq Y$.

γ) Построенное соответствие не функционально,т.к., например, $(0,1) \in G$ и $(0,-1) \in G$.

δ) Соответствие инъективно, так как его график не содержит пар с различными первыми и одинаковыми вторыми координатами.

5. Построим соответствие между конечными множествами, чтобы оно было всюду определено, сюръективно, функционально и не инъективно, изобразим его в виде графа (рис. 1.3.1в) и аналитически:

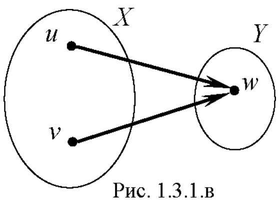


Рис. 1.3.1.в

$\Gamma = (\{u,v\},\{w\},\{(u,w),(v,w)\})$.

Покажем, что это соответствие обладает тем же набором свойств, что и данное.

α) Действительно, это соответствие всюду определено, так как $\text{пр}_1 G = X = \{u, v\}$.

β) Соответствие сюръективно, так как $\text{пр}_2 G = \{w\} = Y$.

γ) Соответствие функционально, так как в его графике нет пар с одинаковыми первыми и различными вторыми координатами.

δ) Соответствие не инъективно, так как его график состоит из двух пар (u,w) и (v,w) с различными первыми и одинаковыми вторыми координатами.

Так как построенное соответствие всюду определено, сюръективно и функционально, оно является отображением X на Y.

Задание 1.3.2

Для соответствия $\Gamma = (X, Y, G)$

1. Определить набор свойств, которыми обладает данное соответствие.

2. Построить соответствие между конечными множествами с набором свойств, противоположным данному, изобразив соответствие аналитически и в виде графа.

Замечание. Отметить случаи отображений и биекций.

Таблица 1.3.2

№	X	Y	G
1	многочлены 2 степени от одной переменной с действительными коэффициентами	R	(многочлен, его корень)
2	множество кругов на плоскости	множество точек плоскости	(круг, его центр)
3	$(0, +\infty)$	$[-1,1]$	$(x, y) \mid x^2 < y$
4	N	R	$(x, \pm\ln x)$

Таблица 1.3.2(продолжение)

№	X	Y	G
5	R	непрерывные на $[a,b]$ функции	$\left(\max\limits_{x\in[a,b]} f(x), f(x)\right)$
6	вузы вашего города	жители вашего города	(вуз; человек, окончивший этот вуз)
7	$(0, +\infty)$	отрезки на прямой	(x, отрезок длины x)
8	фамилии студентов вашей группы	$\{1,2,...,100\}$	(фамилия, число букв в фамилии)
9	окружности на плоскости	Z	(окружность, её длина)
10	функции, определённые на $[0,1]$	R	(функция, ордината её точки максимума)
11	R^2	N	$\left((x,y),\sqrt{x^2+y^2}\right)$
12	имена студентов вашей группы	буквы русского алфавита	(имя, буква из имени)
13	N	студенты вашего вуза	(n, человек с годом рождения n)
14	$[0,1]$	$\{0,1\}$	$(x, f(x))$, где $f(x)=\begin{cases}0, \text{åñëè } õ\in R\setminus Q\\ 1, \text{åñëè } õ\in Q\end{cases}$
15	R	R^{10}	$(\max\limits_{1\le i\le 10} a_i, (a_1, a_2, ..., a_{10}))$
16	окружности на плоскости	прямые на плоскости	(окружность, касательная к этой окружности)
17	$[P(U)]^3$	$P(U)$	$((A,B,C), A\cap B\cap C)$
18	$[0,1]$	R^2	$(x,(x,y) \mid x^2+y^2=1)$
19	R	функции, непрерывные на $[0,1]$	$\left(m, f(x) \mid \min\limits_{0\le x\le 1} f(x)=m\right)$
20	$P(U)$	$[P(U)]^3$	$(D,(A,B,C) \mid A\cup B\cup C=D)$

Таблица 1.3.2(окончание)

№	X	Y	G
21	$\{0,1,2\}$	N	$(x,y)\mid x$ - остаток от деления y на 3
22	$[1,3]$	R_+	$(x,y)\mid(x-2)^2+(y-2)^2\le 1$
23	пары окружностей на плоскости	R^2	(пара окружностей, координаты точки пересечения этих окружностей)
24	множество книг в библиотеке вашего вуза	Z	(книга, число страниц в этой книге)
25	$(-4,\ 4)$	$[1,6]$	$(x,y)\mid y=\mid x-2\mid+1$
26	мужчины вашего города	женщины вашего города	$(x,y)\mid x$ и y состоят или когда - либо состояли друг с другом в законном браке
27	$[P(U)]^2$	$P(U)$	$((A,B),A\setminus B)$
28	политические партии вашего города	жители вашего города	((партия), (человек, состоящий в этой партии))
29	$P(U)$, где $U=\{1,2,\ldots,40\}$	N	$(A,\mid A\mid)$, где $A\in P(U)$
30	пары прямых на плоскости	R	(пара прямых, абсцисса точки пересечения прямых)

Пример решения задания 1. 3. 2

Решим задание 1.3.2 для соответствия $\Gamma=(X,Y,G)$, *если* $X=N$,

Y *- множество непрерывных на* $[a,b]$ *функций, а график* G *задан так:*

$$G=\left\{(J,f(x))\mid J=\int_a^b f(x)dx\right\}.$$

1. Определим набор свойств, которым обладает данное соответствие.

α) Для любого натурального числа n можно рассмотреть непрерывную функцию $f(x)=\dfrac{n}{b-a}$. Тогда, вычисляя определённый интеграл, будем иметь: $\int\limits_a^b \dfrac{n}{b-a}dx=\dfrac{n}{b-a}\int\limits_a^b dx=\dfrac{n}{b-a}x\Bigg|_a^b=\dfrac{n(b-a)}{b-a}=n$

Итак, доказано, что данное соответствие является всюду определённым.

β) Так как для некоторых непрерывных функций на $[a,b]$ определённый интеграл не выражается натуральным числом, то данное соответствие не является *сюръективным*.

γ) Покажем, что две различные функции могут иметь на рассматриваемом промежутке одинаковое значение определённого интеграла. Для этого можно рассмотреть функции

$$f(x)=\frac{n}{b-a} \quad \text{и} \quad g(x)=\frac{2nx}{b^2-a^2}.$$

Для $f(x)$ определённый интеграл не отрезке $[a,b]$, как мы уже выяснили, равен n. Найдём соответствующий интеграл для $g(x)$:

$$\int\limits_a^b g(x)dx=\int\limits_a^b \frac{2nx}{b^2-a^2}dx=\frac{2n}{b^2-a^2}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_a^b=\frac{2n(b^2-a^2)}{2(b^2-a^2)}=n$$

Итак, доказано, что соответствие, описанное в условии задания, не является функциональным.

δ) Так как для каждой функции её определённый интеграл на данном промежутке находится однозначно, данное соответствие является инъективным.

2. Построим соответствие между конечными множествами, чтобы оно было не всюду определено, сюръективно, функционально и не инъективно.

Пусть
$\Gamma=(\{a,b,c\},\{1\},\{(a,1),(b,1)\}$ (рис.1.3.2):

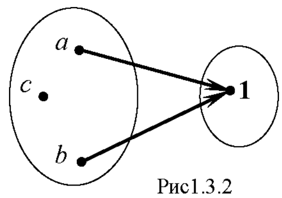


Рис1.3.2

Покажем, что построенное соответствие обладает требуемым набором свойств.

α) Соответствие Γ не всюду определено, так как элемент c, входящий в область отправления, не имеет образа при данном соответствии.

β) Соответствие Γ сюръективно, так как его область прибытия $\{1\}$ совпадает с областью значений.

γ) Соответствие Γ функционально, так как его график не содержит пар с равными первыми и различными вторыми координатами.

δ) Соответствие Γ не инъективно. так как в его графике пары $(a,1)$ и $(b,1)$ имеют различные первые и одинаковые вторые координаты.

Задание 1.3.3

Установить биекцию между множествами

Таблица 1.3.3

№	множества	№	множества
1	$\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$ и $\{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\}$	**9**	$Q \cap [0,1]$ и $Q^2 \cap [0,1]^2$
2	$[0,1]$ и R	**10**	$(0,1)$ и $[e,\pi]$
3	$[0,+\infty)$ и $[0,1]$	**11**	$[0, +\infty)$ и (a,b)
4	N и множество многочленов 3[й] степени с натуральными коэффициентами	**12**	все интервалы на прямой и полуплоскость, расположенная ниже линии $y = x$
5	R и $[0,+\infty)$	**13**	$\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$ и $\{(x,y) \mid x^2+y^2 < 100\}$
6	$\{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$ и $[0,1)$	**14**	Q и $Q \cap [0,+\infty)$
7	все окружности на плоскости и $R \times R \times (0,+\infty)$	**15**	$[0,1]$ и $(2,5)$
8	$\{(x,y) \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \pi$ и R^2	**16**	полуокружность без концевых точек и луч $(0, +\infty)$

Таблица 1.3.3(окончание)

№	множества	№	множества
17	$(-\infty, 0)$ и R	**24**	Q и $Q \cap [0,1]$
18	N и Q^2	**25**	R и $[1,+\infty) \cup \{-10\}$
19	Q и множество всех многочленов с рациональными коэффициентами	**26**	N и N^2
20	$(0,1)$ и R	**27**	все последовательности натуральных чисел и все возрастающие последовательности натуральных чисел
21	Q и Q^2	**28**	N и множество всех многочленов с натуральными коэффициентами
22	сфера с выколотой точкой и вся плоскость	**29**	R и $R \setminus Q$
23	$\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 4\}$ и $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \ge 4\}$	**30**	Q и N^2

Пример решения задания 1.3.3

Установить биекцию между множествами $[0,1]$ *и* $(0,1)$.

Будем считать, что $X=[0,1]$, $Y=(0,1)$. Пусть $A=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right\}$,

$B=\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right\}=A\cup\{0,1\}$. Очевидно, что $X\setminus B=Y\setminus A$,

$X=X\setminus B\cup B,\quad Y=Y\setminus A\cup A.$

Установим биекцию между множествами $X\setminus B$ и $Y\setminus A$, как тождественное соответствие $f(x)=x$.

Биекцию между множествами A и B зададим так:

$$f(0)=\frac{1}{2},\quad f(1)=\frac{1}{3},\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},\quad f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{5},\ldots,f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+2},\ldots$$

Таким образом, между X и Y установлена биекция:

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{при } x\neq 0,\ x\notin\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n\in N\right\} \\ \frac{1}{2}, & \text{при } x=0 \\ \frac{1}{n+2}, & \text{при } x\in\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n\in N\right\} \end{cases}$$

Изобразим график этой биекции в декартовой системе координат (рис. 1.3.3):

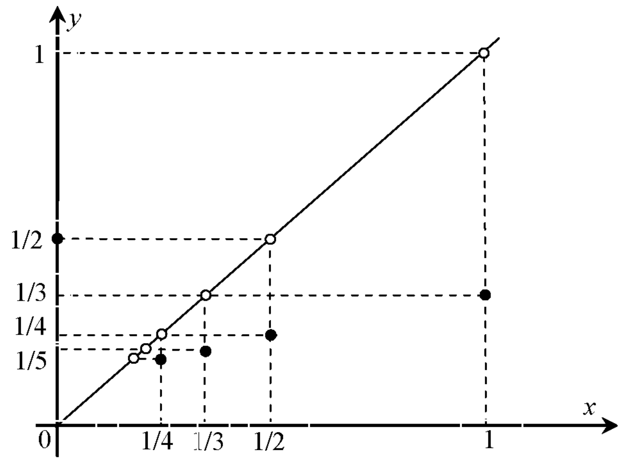


Рис.1.3.3

Задание выполнено.

Задание 1.3.4

Доказать выполнение условия

Таблица 1.3.4

№	условие
1	всех многочленов от x с рациональными коэффициентами счётно
2	всех пар рациональных чисел счётно
3	всех многочленов от x с целыми коэффициентами счётно
4	всех кругов на плоскости, радиусы которых и координаты центра являются рациональными числами - счётно
5	попарно непересекающихся замкнутых кругов на плоскости не более чем счётно
6	всех многочленов n - й степени от x с рациональными коэффициентами счётно
7	всех многочленов n - й степени от x с целыми коэффициентами счётно
8	попарно непересекающихся прямоугольников на плоскости не более чем счётно
9	всех окружностей на плоскости, радиусы которых и координаты центра являются целыми числами - счётно
10	полученное объединением счётного числа конечных множеств – не более, чем счётно.
11	полученное объединением счётного числа счётных множеств - счётно
12	рациональных чисел интервала (0,1) - счётно
13	непересекающихся окружностей на плоскости может быть континуально
14	всех действительных чисел интервала (0,1), в десятичном разложении которых на четвёртом месте стоит цифра 7 - континуально
15	точек разрыва монотонно убывающей на $[a,b]$ функции - не более чем счётно
16	точек плоскости, расстояние между любыми элементами которого больше 3, не более чем счётно
17	попарно непересекающихся открытых интервалов на прямой не более чем счётно

18	полученное объединением счётного числа непустых попарно непересекающихся конечных множеств, счётно

Таблица 1.3.4(окончание)

№	**условие**
19	всех конечных последовательностей натуральных чисел - счётно
20	всех конечных подмножеств счётного множества - счётно
21	попарно непересекающихся букв Γ на плоскости может быть континуально
22	попарно непересекающихся букв L на плоскости может быть континуально
23	попарно непересекающихся букв T на плоскости не более чем счётно
24	$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ - счётно, если каждое из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - счётно
25	чисел вида $2^n \cdot 3^m$ - счётно, если $n \in N$ и $m \in N$
26	иррациональных чисел интервала $(0,1)$ - несчётно
27	всех бесконечных последовательностей, составленных из нулей и единиц - континуально
28	всех корней многочленов третьей степени с натуральными коэффициентами - счётно
29	функций вида $f : E^n \to E$, где $E = \{0,1\}$, $n = 1,2,3,\ldots$ - счётно
30	полученное объединением конечного числа счётных множеств - счётно

Пример решения задания 1.3.4

Доказать, что множество всех конечных последовательностей, составленных из элементов некоторого счётного множества, счётно.

Пусть множество A счётно, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Обозначим через B_k множество конечных последовательностей длины k, составленных из элементов множества A, $k \in N$. Покажем для любого k, что множество B_k – счётно.

Пусть

$$\left.\begin{aligned} b_1^k &= \underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{k} \end{aligned}\right\} \text{ - сумма индексов у } a_i \text{ равна } k,$$

$$\left.\begin{aligned} b_2^k &= a_1, a_1, \ldots, a_2 \\ b_3^k &= a_1, a_2, \ldots, a_1 \\ &\ldots \\ b_{k+1}^k &= \underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_2}_{k} \end{aligned}\right\} \text{ - сумма индексов у } a_i \text{ равна } k+1$$

$$\left.\ldots\right\} \text{ - сумма индексов у } a_i \text{ равна } k+2 \text{ и т.д.}$$

Таким образом, любая конечная последовательность длины k, составленная из элементов счётного множества, получит свой номер.

Выпишем элементы множеств B_k в виде бесконечной таблицы, где $k \in N$ (таблица 1.3.4).

Таблица 1.3.4

Будем обходить таблицу по маршруту, помеченному стрелками:

$$\begin{tikzcd}
b_1^1 \arrow[r] & b_2^1 \arrow[d] & b_3^1 \arrow[r] & b_4^1 \arrow[d] & \ldots \\
b_1^2 \arrow[d] & b_2^2 \arrow[l] & b_3^2 \arrow[u] & b_4^2 \arrow[d] & \ldots \\
b_1^3 \arrow[r] & b_2^3 \arrow[r] & b_3^3 \arrow[u] & b_4^3 \arrow[d] & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \arrow[l] & \ldots
\end{tikzcd}$$

По мере продвижения по этому маршруту будем навешивать номера: $b_1^1 - 1,\ b_2^1 - 2,\ b_2^2 - 3,\ b_1^2 - 4,$ и т. д.

Имеем, что для любых индексов i, p последовательность b_i^p получит когда - нибудь единственный номер.

Таким образом, установлена биекция между множеством, составленным из элементов b_i^p и множеством индексов N, то есть доказана счётность множества всех конечных последовательностей, составленных из элементов некоторого счётного множества A.

1.4. Отношения

Бинарным отношением на множестве A называется пара $\Phi = (A, G)$, где A - *область задания отношения*, G - *график отношения*, причём $G \subseteq A^2$.

Если $(x, y) \in G$, то будем писать $x\varphi y$ и говорить, что x и y *вступают в отношение* φ. Если x и y *не вступают в отношение* φ, будем писать $\overline{x\varphi y}$.

Диагональю множества A^2 называется график $\Delta_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$.

Свойства отношений :

1. *Рефлексивность*: $\forall_{x\in A}(x\varphi x)$

2. *Антирефлексивность*: $\forall_{x\in A}(\overline{x\varphi x})$

3. *Симметричность*: $\forall_{x\in A}\forall_{y\in A}(x\varphi y \to y\varphi x)$

4. *Антисимметричность*: $\forall_{x\in A}\forall_{y\in A}(x\varphi y, y\varphi x \to x = y)$ или

равносильное определение: $\forall_{x\in A}\forall_{y\in A}(x\varphi y, x \neq y \to \overline{y\varphi x})$

5. *Транзитивность*: $\forall_{x\in A}\forall_{y\in A}\forall_{z\in A}(x\varphi y, y\varphi z \to x\varphi z)$

6. *Связность*: $\forall_{x\in A}\forall_{y\in A}(x \neq y \to x\varphi y$ или $y\varphi x)$

Эти свойства можно определить с помощью графиков отношений:

1. $\Delta_A \subseteq G$, 2. $\Delta_A \cap G = \varnothing$, 3. $G = G^{-1}$,

4. $G \cap G^{-1} \subseteq \Delta_A$, 5. $G \circ G \subseteq G$, 6. $A^2 \setminus \Delta_A \subseteq G \cup G^{-1}$.

Если даны два отношения: $\hat{O}=(A,G)$ и $\Psi=(A,F)$, то операции над этими отношениями сводятся к операциям над их графиками:

$\hat{O}\cup\Psi=(A,G\cup F)$, $\qquad \hat{O}\cap\Psi=(A,G\cap F)$, $\qquad \hat{O}\setminus\Psi=(A,G\setminus F)$,

$\hat{O}\Delta\Psi=(A,G\Delta F)$, $\qquad \overline{\Phi}=(A,A^2\setminus \mathrm{G})$.

Отношение называется отношением *частичного порядка*, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Отношение называется отношением *линейного порядка*, если оно является отношением частичного порядка и связно.

Отношение называется отношением *строгого порядка*, если оно антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Отношение называется отношением *строгого линейного порядка,* если оно - связное отношение строгого порядка.

Отношение называется отношением *эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Классом эквивалентности, порождённым элементом x, называется множество всех элементов из A, вступающих с x в отношение эквивалентности.

Фактор - множеством множества A по отношению эквивалентности φ называется множество всех различных классов эквивалентности, которое обозначается A/φ.

Мощность фактор - множества A/φ называется *индексом разбиения*, порождённого отношением φ.

Задание 1.4.1

Проверить для произвольных отношений $\hat{O}=(A,G)$ и $\Psi=(A,F)$ справедливость утверждения: “ Если отношения $\hat{O}$ и Ψ обладают свойством α, то отношение $\grave{O}$ также обладает свойством α”.

Обозначения: 1- рефлексивность, 2- антирефлексивность, 3 - симметричность, 4 - антисимметричность, 5 - транзитивность, 6 - связность.

Таблица 1.4.1

№	α	T
1	2	$\hat{O}\cup\Psi$

№	α	T
5	2	$\hat{O}\circ\Psi$

№	α	T
9	3	$\hat{O}\setminus\Psi$

2	2	$\hat{O} \cap \Psi$	**6**	2	$\hat{O}^{-1}$	**10**	3	$\hat{O} \Delta \Psi$
3	2	$\hat{O} \setminus \Psi$	**7**	3	$\hat{O} \cup \Psi$	**11**	**3**	$\hat{O} \circ \Psi$
4	2	$\hat{O} \Delta \Psi$	**8**	3	$\hat{O} \cap \Psi$	**12**	**3**	$\hat{O}^{-1}$

Таблица 1.4.1(окончание)

№	α	**T**	**№**	α	**T**	**№**	α	**T**
13	4	$\hat{O} \cup \Psi$	**19**	5	$\hat{O} \cup \Psi$	**25**	6	$\hat{O} \cup \Psi$
14	4	$\hat{O} \cap \Psi$	**20**	5	$\hat{O} \cap \Psi$	**26**	6	$\hat{O} \cap \Psi$
15	4	$\hat{O} \setminus \Psi$	**21**	5	$\hat{O} \setminus \Psi$	**27**	6	$\hat{O} \setminus \Psi$
16	4	$\hat{O} \Delta \Psi$	**22**	5	$\hat{O} \Delta \Psi$	**28**	6	$\hat{O} \Delta \Psi$
17	4	$\hat{O} \cap \Psi$	**23**	5	$\hat{O} \circ \Psi$	**29**	6	$\hat{O} \circ \Psi$
18	4	$\hat{O}^{-1}$	**24**	5	$\hat{O}^{-1}$	**30**	6	$\hat{O}^{-1}$

Примеры решения задания 1.4.1

Пример 1.

Проверить для произвольных отношений $\hat{O} = (A, G)$ и $\Psi = (A, F)$ справедливость утверждения: “Если отношения $\hat{O}$ и Ψ транзитивны, то отношение $\overline{\Phi \circ \Psi}$ также транзитивно”.

Пусть $A = \{a,b,c\}$, $G = \{(a,b)\}$, $F = \{(b,c)\}$. Тогда $G \circ F = \{(a,c)\}$,

$$\overline{G \circ F} = A^2 \setminus \{(a,c)\} = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,a),(c,b),(b,c),(c,c)\}.$$

Отношение $\overline{\Phi \circ \Psi}$ не транзитивно, так как его график $\overline{G \circ F}$ содержит пары (a,b) и (b,c), но не содержит пару (a,c). Значит, в общем случае утверждение, приведённое в примере 1, неверно.

Пример 2.

Проверить для произвольных отношений $\hat{O} = (A, G)$ и $\Psi = (A, F)$ справедливость утверждения: “Если отношения $\hat{O}$ и Ψ рефлексивны, то отношение $\hat{O} \cup \Psi$ также рефлексивно”.

Для рефлексивных отношений $\hat{O}$ и Ψ выполнены условия:

$\Delta_A \subseteq G$, $\Delta_A \subseteq F$. Значит, выполнено также включение: $\Delta_A \subseteq G \cup F$, а это и означает, что отношение $\hat{O} \cup \Psi$ также рефлексивно. То есть мы показали, что утверждение примера 2 верно для произвольных отношений $\hat{O}$ и Ψ.

Задание 1.4.2

1. Выяснить, какими из свойств: рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность, связность обладает данное отношение $\hat{O} = (A, G)$.

2. Выяснить, что представляет из себя отношение $\hat{O} \circ \hat{O}$, $\hat{O} \circ \hat{O}^{-1}$.

3. Построить на конечном множестве отношение, обладающее таким же набором свойств, что и данное. Изобразить его графом и аналитически.

4. Построить на бесконечном множестве отношение, обладающее набором свойств, противоположным данному. В случае невозможности построения доказать противоречивость набора требований.

Замечание. В случае отношений эквивалентности указать классы эквивалентности, фактор-множество, индекс разбиения. В случае отношений частичного или линейного порядка указать максимальные, минимальные, а также наибольшие и наименьшие элементы (если они существуют).

Таблица 1.4.2

№	A	G
1	множество студентов вашего вуза	$x \varphi y \Leftrightarrow x, y$ учатся на одном курсе
2	$P(U)$, где U - множество точек плоскости	$A \varphi B \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$
3	множество окружностей на плоскости	$x \varphi y \Leftrightarrow x$ касается y
4	жители России на начало этого года	$x \varphi y \Leftrightarrow x$ и y - супруги

5	жители России на начало этого года	$x \varphi y \Leftrightarrow x$ и y состоят в одной и той же политической партии
6	прямые в пространстве	$x \varphi y \Leftrightarrow x$ и y имеют хотя бы одну общую точку
7	жители России на начало этого года	$x \varphi y \Leftrightarrow x$ и y разного возраста

Таблица 1.4.2(продолжение)

№	**A**	**G**
8	N	$x \varphi y \Leftrightarrow x$ и y имеют одинаковый остаток от деления на 3
9	$P(N)$	$A \varphi B \Leftrightarrow \|A\|=\|B\|$
10	R	$x \varphi y \Leftrightarrow 2x > y^2$
11	$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in \{0,1\}\}$	$x \varphi y \Leftrightarrow x$ и y отличаются только в одной координате
12	R^2	$(x,y)\varphi(z,t) \Leftrightarrow x = z$ или $y = t$
13	R	$x \varphi y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$
14	жители России на начало этого года	$x \varphi y \Leftrightarrow x$ ñòàðøå y
15	$[0,4]$	$x \varphi y \Leftrightarrow x > 2y + 1$
16	R	$x \varphi y \Leftrightarrow x$ и y имеют одинаковую целую часть
17	N	$x \varphi y \Leftrightarrow x \cdot y$ кратно трём
18	$\mathrm{P}(U)$, где U - множество точек плоскости	$A \varphi B \Leftrightarrow A$ и B - в общем положении
19	жители России на начало этого года	$x \varphi y \Leftrightarrow y$ - тёща для x

20	$[0,2]$	$x \varphi y \Leftrightarrow x + y < 1$
21	N^2	$(x, y)\varphi(z, t) \Leftrightarrow xt = yz$
22	N	$x \varphi y \Leftrightarrow x + y$ кратно трём
23	непрерывные на [0,1] функции	$f(x)\varphi g(x) \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$

Таблица 1.4.2(окончание)

№	A	G
24	R^n	$(a_1,\ldots,a_n)\varphi(b_1,\ldots,b_n) \Leftrightarrow$ $\{max\ a_i,\ 1 \le i \le n\} =$ $= \{max\ b_i,\ 1 \le i \le n\}$
25	жители России на начало этого года	$x \varphi y \Leftrightarrow x$ - отец для y
26	R	$x \varphi y \Leftrightarrow x = 2y + 3$
27	читатели библиотеки вашего вуза	$x \varphi y \Leftrightarrow x$ и y прочитали одну и ту же книгу
28	$\mathrm{P}(U)$, где U - множество точек плоскости	$A \varphi B \Leftrightarrow A \cup B = \varnothing$
29	векторы на плоскости	$\overline{a} \varphi \overline{b} \Leftrightarrow \lvert\overline{a}\rvert = \lvert\overline{b}\rvert$
30	жители России на начало этого года	$x \varphi y \Leftrightarrow x$ - внук y

Пример решения задания 1.4.2

Решить задание 1.4.2 для случая, когда A - множество теннисистов, участвующих в турнире, где каждый теннисист должен сыграть с каждым ровно три партии. Пусть $x \varphi y$ означает, что x обыграл y по результатам личных встреч.

1. Выясним, какими из основных свойств обладает данное отношение.

$\overline{1}$. Отношение φ не является рефлексивным, так как найдётся теннисист, не обыгравший сам себя.

2. Отношение φ является антирефлексивным, так как каждый теннисист не обыграл сам себя.

$\overline{3}$. Отношение φ не является симметричным, так как найдётся пара теннисистов x и y такая, что x обыграл y по очкам в личных встречах, а y не обыграл x.

4. Отношение φ является антисимметричным, так как если x обыграл y, то y обязательно не обыграл x.

$\overline{5}$. Отношение φ не яляется транзитивным, так как может сложиться ситуация, когда x обыграл y, y обыграл z, и в то же время z обыграл x.

6. Отношение φ является связным, так как любая пара спортсменов должна сыграть между собой и выявить победителя.

2. Выясним, что из себя представляют отношения $Ф \circ Ф$ и $Ф \circ Ф^{-1}$.

По определению композиции, $x\,\varphi\circ\varphi\,y$ означает, что найдётся z такой, что $x\,\varphi\,z$ и $z\,\varphi\,y$. То есть, в отношение $Ф \circ Ф$ будут вступать такие пары спортсменов x и y, для которых найдётся теннисист z такой, что x обыграл z, а z обыграл y.

Рассуждая аналогично, получим. что в отношение $Ф \circ Ф^{-1}$ будут вступать такие пары спортсменов x и y, для которых найдётся теннисист z такой, что x обыграл z, а z проиграл y. То есть график отношения $Ф \circ Ф^{-1}$ будут образовывать пары, составленные из теннисистов, для которых найдётся хотя бы один спортсмен, которого они оба обыграли в турнире.

3. Построим на конечном множестве отношение, обладающее таким же набором свойств, что и данное.

Пусть $\hat{O} = (\{a,b,c\},\{(a,b),(b,c),(c,a)\})$. Изобразим это отношение в виде графа (рис. 1.4.2):

a b

$\overline{1}$. Это отношение не является рефлексивным, так как $\overline{a\varphi a}$.

2. Отношение антирефлексивно, так как $\overline{a\varphi a}$ и $\overline{b\varphi b}$ и $\overline{c\varphi c}$.

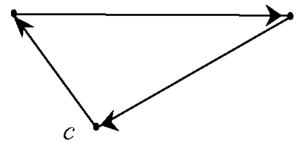


Рис.1.4.2

$\overline{3}$. Отношение не симметрично, так как $a\varphi b$ и $\overline{b\varphi a}$.

4. Отношение антисимметрично, так как $a\varphi b$ и $\overline{b\varphi a}$, $b\varphi c$ и $\overline{c\varphi b}$, $c\varphi a$ и $\overline{a\varphi c}$.

$\overline{5}$. Отношение не транзитивно, так как $a\varphi b$ и $b\varphi c$, но $\overline{a\varphi c}$.

6. Отношение связно, так как любая пара различных элементов из множества $\{a,b,c\}$ вступает в отношение φ в том или ином порядке.

4. Построим на бесконечном множестве отношение рефлексивное, не антирефлексивное, симметричное, не антисимметричное, транзитивное и не связное.

Пусть $A=(0,+\infty)$, $x\varphi y$ означает, что x и y имеют одинаковую дробную часть.

1. Отношение рефлексивно, так как любое число имеет одинаковую дробную часть само с собой.

$\overline{2}$. Отношение не антирефлексивно, так как найдётся число (например, 1,32), имеющее одинаковую дробную часть само с собой.

3. Отношение симметрично, так как если x и y имеют одинаковую дробную часть, то y и x также имеют одинаковую дробную часть.

$\overline{4}$. Отношение φ не антисимметрично, так как, например, числа 1,78 и 4,78 не равны, и в то же время $4{,}78\ \varphi\ 1{,}78$ и $1{,}78\ \varphi\ 4{,}78$.

5. Отношение является транзитивным, так как если x и y имеют одинаковую дробную часть, y и z имеют одинаковую дробную часть, то x и z также имеют ту же самую дробную часть.

$\overline{6}$. Отношение не связно, так как, например, $3{,}1\neq 1{,}6$ и $\overline{3{,}1\varphi 1{,}6}$ и $\overline{1{,}6\varphi 3{,}1}$.

Это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, значит, оно является отношением эквивалентности. Классами эквивалентности являются множества $\{x_i \mid x_k - x_m \in Z\}$. Индекс разбиения, соответствующего данному отношению эквивалентности - континуальный, так как мощность фактор-множества A/φ равна мощности всевозможных дробных частей, то есть множеству точек промежутка (0,1).

Задание 1.4.3

Провести факторизацию отображения $f: X \to Y$, если

$X = \{a, b, c, d, e\}$, $Y = \{1,2,3,4,5\ ,6\}$, а значения $f(x)$ заданы таблицей

Таблица 1.4.3

№	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	$f(d)$	$f(e)$
1	1	3	1	4	3
2	1	2	5	5	1
3	4	3	4	2	4
4	2	3	6	2	3
5	1	2	2	4	5
6	3	2	3	2	3
7	5	5	4	5	6
8	1	6	3	1	3
9	2	3	2	3	4
10	6	3	6	2	6
11	4	3	2	3	4
12	5	1	1	6	5
13	3	5	3	5	5
14	4	3	2	1	3
15	5	2	5	3	2

16	4	1	4	2	4
17	6	1	6	1	1
18	5	3	5	3	3
19	6	4	1	1	4
20	3	2	3	2	2
21	5	6	6	1	5
22	2	1	2	3	2
23	5	5	4	5	4

Таблица 1.4.3(окончание)

№	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	$f(d)$	$f(e)$
24	3	1	3	2	2
25	5	3	3	6	3
26	2	4	2	5	2
27	4	3	4	1	3
28	3	1	1	4	5
29	2	2	3	2	3
30	4	5	6	4	6

Пример решения задания 1.4.3

Провести факторизацию отображения $f: X \to Y$, *если* $X = \{a,b,c,d,e\}$, $Y = \{1,2,3,4,5,6\}$, *а значения* $f(x)$ *таковы:* $f(a) = 2;\ f(b) = 5;\ f(c) = 2;\ f(d) = 4;\ f(e) = 5.$

Рассмотрим на множестве X отношение Φ, которое определим так: $x_1 \varphi x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Это - отношение эквивалентности, которое порождает разбиение множества X на классы эквивалентности.

В нашем примере имеем: $[a] = [c] = \{a,c\}$; $[d] = \{d\}$; $[b] = [e] = \{b,e\}$. Эти классы образуют фактор - множество множества X по отношению φ: $X/\varphi = \{\{a,c\},\{d\},\{b,e\}\}$. Заметим, что индекс разбиения множества X равен 3. Введём соответствие так: $g(a) = g(c) = \{a,c\}$, $g(d) = \{d\}$,

$g(b) = g(e) = \{b, e\}$. Легко заметить, что g является отображением X на X/φ. Для исходного отображения $f(x)$ областью значений является множество $f(X) = \{2,4,5\}$.

Рассмотрим соответствие h следующего вида: $h: X/\varphi \to f(X)$, заданное равенствами: $h(\{a,c\}) = 2$, $h(\{d\}) = 4$, $h(\{b,e\}) = 5$. Это соответствие всюду определено, сюръективно, функционально и инъективно, то есть h - биекция между множествами X/φ и $f(X)$.

Рассмотрим, наконец, соответствие $e: f(X) \to Y$, $e(x) = x$. Это соответствие всюду определено, функционально и инъективно, то есть $e(x)$ является взаимно-однозначным отображением $f(X)$ в Y.

Итак, исходное соответствие $f(x)$ можно представить в виде композиции соответствий g, h и e. В построении этой композиции и заключается факторизация отображения f.

Задание 1.4.4

Для данного отношения Ф=({1,2,3,4,5}, G) проделать следующее:

1. Изобразить Ф графом.
2. Достроить Ф до отношения эквивалентности, указать фактор-множество.
3. Достроить Ф до отношения частичного порядка, указать максимальные, минимальные элементы, а также пары несравнимых элементов.
4. Достроить Ф до отношения линейного порядка, указать наибольший и наименьший элементы.
5. Достроить Ф до отношения строгого порядка.
6. Достроить Ф до отношения строгого линейного порядка.

<u>Замечание:</u> отношение достраивается с помощью введения минимально необходимого числа дополнительных рёбер.

Таблица 1.4.4

№	G
1	(1,2), (3,2), (2,4)

№	G
12	(1,2), (1,3), (3,2), (4,5)

2	(2,1), (5,1), (4,2)	**13**	(1,2), (2,3), (3,4), (5,5)
3	(1,2), (3,4), (4,5)	**14**	(4,3), (5,1), (1,2)
4	(3,1), (2,5), (5,4)	**15**	(1,3), (3,4), (1,4), (2,5)
5	(1,5), (5,4), (4,3)	**16**	(2,3), (4,3), (3,5)
6	(2,3), (3,5), (5,1)	**17**	(3,2), (1,2), (5,3)
7	(1,2), (4,3), (4,5)	**18**	(2,3), (4,5), (5,1)
8	(3,5), (4,2), (1,2)	**19**	(4,2), (3,1), (1,5)
9	(1,2), (2,3), (2,4), (4,5)	**20**	(2,1), (1,5), (5,4)
10	(1,2), (2,3), (4,5), (5,3)	**21**	(3,4), (4,1), (1,2)
11	(1,2), (1,5), (1,4)	**22**	(2,3), (5,4), (5,1)

Таблица 1.4.4(окончание)

№	G	№	G
23	(4,1), (5,3), (2,3)	**27**	(3,4), (1,5), (5,2)
24	(2,3), (4,5), (3,4), (1,1)	**28**	(5,4), (4,3), (5,3), (2,1)
25	(4,3), (3,1), (1,2)	**29**	(2,4), (3,4), (4,1)
26	(5,2), (2,4), (4,3), (1,1)	**30**	(4,2), (5,2), (1,4)

Пример решения задания 1.4.4

Решим задание для Ф = ({1,2,3,4,5}, {(1,2), (1,3), (5,4)}).

Изобразим граф отношения Ф (рис. 1.4.4а):

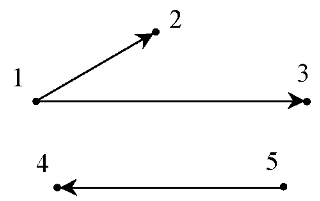


Рис. 1.4.4а

2. Достроим Ф до отношения эквивалентности $Ф_1$, добавляя минимально возможное число рёбер, обозначим график полученного отношения эквивалентности через G_1. Тогда G_1 будет

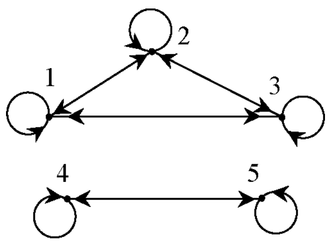


Рис. 1.4.4в

иметь вид: {(1,2), (1,3), (5,4), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (2,1), (3,1), (4,5), (2,3),(3,2)}.

Изобразим граф отношения Φ_1(рис. 1.4.4в):

Укажем фактор-множество для $A = \{1,2,3,4,5\}$ по отношению Φ_1:

$A/\varphi_1 = \{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$. Отметим, что индекс разбиения множества A равен 2.

3. Достроим Ф до отношения частичного порядка Φ_2, обозначив график этого отношения через G_2.

$G_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(1,3),(5,4)\}$.

Изобразим граф Φ_2 (рис. 1.4.4c):

Минимальными элементами здесь являются 1 и 5, максимальными элементами - 2, 3 и 4.

Пары несравнимых элементов: {1,4},{1,5}, {2,4}, {2,5}, {3,4}, {3,5}, {2,3}.

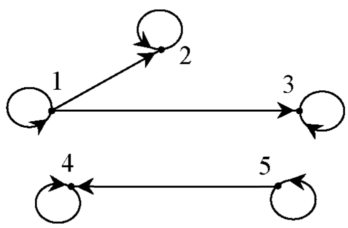


Рис. 1.4.4c

4. Достроим Ф до отношения линейного порядка Φ_3, обозначив график этого отношения через G_3.

$G_3 = G_2 \cup \{(2,3),(4,1),(4,2),(4,3),$
$(5,1),(5,2),(5,3)\}$.

Изобразим граф отношения Φ_3

(рис. 1.4.4d):

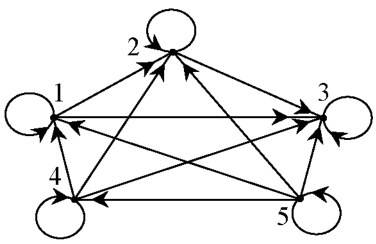


Рис. 1.4.4d

Наибольшим элементом здесь является 3, а наименьшим - 5.

5. Само исходное отношение Ф является отношением строгого порядка, так что достраивать его нет необходимости.

6. Достроим Ф до отношения строгого линейного порядка $Ф_4$, обозначив график этого отношения через G_4.

$G_4 = G_3 \setminus \Delta_A = \{(5,4),(5,1),(5,2),(5,3),(4,1),(4,3),(4,3),(1,2),(1,3),(3,2)\}$.

Изобразим граф отношения $Ф_4$ (рис. 1.4.4е):

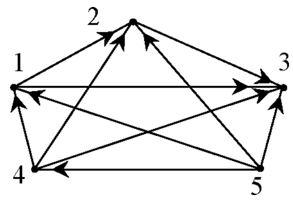


Рис. 1.4.4е

Задание выполнено

Глава 2. Булевы функции

2.1 Булевы функции. Суперпозиции

Булевой функцией (сокращенно бф) называется функция вида $f : E^n \to E,$ где $E = \{0,1\}$, т.е. $f(x_1, x_2,...x_n)$, принимающая значения 0, 1 и аргументы которой могут принимать значения 0, 1.

Множество всех булевых функций будем обозначать через P_2.

В таблице, задающей бф, наборы значений переменных пишут в определенном порядке - *лексикографическом*, который совпадает с порядком возрастания наборов, рассматриваемых как числа в двоичной системе счисления.

Булевы функции, заданные таблицами 2.1а, 2.1в, будем считать *элементарными.*

Таблица 2.1а

x	g_1	g_2	g_3	g_4
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Используются обозначения:

$g_1(x) \equiv 0$ - *константа 0*

$g_2(x) \equiv 1$ - *константа 1*

$g_3(x) = x$ - *тождественная функция*

$g_4(x) = \overline{x}$ - *отрицание*

Для отрицания употребляется также обозначение $\neg x$.

Таблица 2.1в

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}
0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0

$f_1(x, y) = x \cdot y$ - *конъюнкция*, употребляются также обозначения $x \wedge y$ и $x \& y$.

$f_2(x, y) = x \vee y$ - *дизъюнкция* $f_3(x, y) = x \to y$ - *импликация*

$f_4(x, y) = y \to x$ - *импликация*

$f_5(x, y) = x + y$ - *сложение по модулю два*

$f_6(x, y) = x \leftrightarrow y$ - *эквиваленция* $f_7(x, y) = x \mid y$ - *штрих Шеффера*

$f_8(x, y) = x \downarrow y$ - *стрелка Пирса* $f_9(x, y) = x \not\to y$ - *запрет*

$f_{10}(x, y) = y \not\to x$ – *запрет*

Наборы u и v значений переменных называются *соседними по i - той переменной*, если они отличаются только i - той координатой, то есть имеют вид:

$u = (a_1, a_2, \ldots a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n)$, $v = (a_1, a_2, \ldots a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$.

Переменная x_i называется *фиктивной переменной* бф f, если для любых наборов u, v соседних по i - той переменной, выполняется равенство $f(u) = f(v)$.

Переменная x_i называется *существенной переменной* бф f, если существуют хотя бы одна пара u, v наборов значений переменных, соседних по i - той переменной, такая, что справедливо неравенство $f(u) \neq f(v)$.

Суперпозицией функций $f_1, \dots, f_m$ называется бф, полученная с помощью подстановок этих функций друг в друга на места переменных, а также с помощью переименования переменных. Выражение, описывающее суперпозицию, называется *формулой*.

Некоторые основные равносильности:

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot y = y \cdot x \\ x \vee y = y \vee x \end{array}\right\} \text{ - } \textit{коммутативные законы}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \end{array}\right\} \text{ - } \textit{ассоциативные законы}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z) \\ x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z) \end{array}\right\} \text{ - } \textit{дистрибутивные законы}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot x = x \\ x \vee x = x \end{array}\right\} \text{ - } \textit{законы идемпотентности}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x \cdot 0 = 0 & x \cdot 1 = x \\ x \vee 0 = x & x \vee 1 = 1 \end{array}\right\} \text{ - } \textit{тождества с константами}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot (x \vee y) = x \\ x \vee (x \cdot y) = x \end{array}\right\} \text{ - } \textit{законы поглощения}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{x \cdot y} = \overline{x} \vee \overline{y} \\ \overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y} \end{array}\right\} \text{ - } \textit{законы де Моргана}$$

$$\overline{x} \vee x = 1 \text{ - } \textit{закон исключённого третьего}$$

$\bar{x} \cdot x = 0$ - *закон противоречия*

$\bar{\bar{x}} = x$ - *закон двойного отрицания*

$\bar{x} \cdot y \vee x = y \vee x$ - *правило вычёркивания*

Задание 2.1.1

Построить таблицу данной булевой функции $f(x, y, z)$

Таблица 2.1.1

№	$f(x,y,z)$
1	$x + y \wedge z \to \bar{x} \vee \bar{z}$
2	$(x \mid y) \to \bar{z} \wedge y + x$
3	$(x \to \bar{y}) + z \vee x$
4	$x \vee y + \bar{z} \leftrightarrow y$

№	$f(x,y,z)$
5	$x \vee \overline{y \to z} + y$
6	$\bar{x} \vee y \to z \wedge y$
7	$(x \downarrow y) \vee \overline{x \to z}$
8	$(x \wedge y \to z) \vee x + y$

Таблица 2.1.1(окончание)

№	$f(x,y,z)$
9	$(x \mid y) \wedge z \to \bar{y} \vee x$
10	$(x \to y \wedge z) + \bar{x}$
11	$x \vee y \wedge \bar{z} \to x \wedge y$
12	$(x + y) + (z \vee \bar{x})$
13	$x \vee y + z \to \bar{y}$
14	$(x \downarrow y) + z \vee \bar{x}$
15	$(x \vee y \to \bar{z}) + y$

№	$f(x,y,z)$
20	$(x \mid y) \wedge z \vee \bar{x}$
21	$(x \to y) + z \leftrightarrow \bar{y}$
22	$(x \downarrow y) \leftrightarrow z + y$
23	$(x \vee y) + z \to y$
24	$x \wedge y + z \to \bar{x}$
25	$(x + (y \downarrow z)) + y$
26	$\overline{x \to y} \vee \bar{y} + z$

16	$x \leftrightarrow y + z \vee \bar{y}$	**27**	$(x \mid y) + (y \to z \wedge \bar{x})$
17	$x \vee y \wedge \bar{z} + y$	**28**	$\overline{x \to y} \wedge (x \vee \bar{y} + z)$
18	$(x + y) \wedge z \vee \bar{x}$	**29**	$y + z \leftrightarrow z \wedge x \vee x$
19	$(x \to \bar{y}) + (z \vee y)$	**30**	$x \wedge \overline{y \to z} \leftrightarrow \bar{y} + z$

Пример решения задания 2.1.1

Построить таблицу булевой функции, заданной формулой

$$f(x,y,z) = x \to y \wedge z \vee \neg x$$

Выпишем в таблицу под символами переменных все наборы значений, которые эти переменные принимают, а под символами булевых операций будем выписывать значения функций, соответствующие этим наборам.

Для наглядности сверху проставим числа, указывающие порядок выполнения действий, а снизу с помощью стрелок покажем, над какими столбцами производятся действия и куда пишется результат выполнения этих действий. Самой булевой функции $f(x,y,z)$ будет соответствовать столбец, обведённый двойной рамкой.

	4		2		3	1	
x	$\to$	y	$\wedge$	z	$\vee$	$\neg$	x
0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0	1

Итак, мы нашли, что исходная формула задаёт булеву функцию $f(x,y,z)$, имеющую вектор значений (1111 0001).

Задание 2.1.2

Написать таблицу функции $h(x,y)$, являющейся суперпозицией функций f_n и f_k, если $f_1 = (1001\ 0111)$, $f_2 = (0110\ 1011)$, $f_3 = (1110\ 0110)$, $f_4 = (0111\ 0011)$, $f_5 = (1100\ 0111)$, $f_6 = (1001\ 0100)$, $f_7 = (1011\ 0101)$, $f_8 = (1000\ 0110)$, $f_9 = (1010\ 0110)$, $f_{10} = (0101\ 1000)$.

Таблица 2.1.2

№	n	k	$h(x,y)$	№	n	k	$h(x,y)$
1	1	2	$f_n(x,f_k(x,x,y),y)$	**9**	5	4	$f_n(f_k(x,y,y),x,y)$
2	2	1	$f_n(x,f_k(y,x,y),x)$	**10**	3	2	$f_n(x,x,f_k(x,y,y))$
3	1	2	$f_n(y,f_k(x,y,x),x)$	**11**	4	3	$f_n(x,y,f_k(y,x,y))$
4	3	5	$f_n(x,f_k(y,x,y),y)$	**12**	2	4	$f_n(x,f_k(x,y,y),y)$
5	3	2	$f_n(y,f_k(x,y,x),x)$	**13**	5	7	$f_n(x,y,f_k(y,x,x))$
6	4	3	$f_n(x,f_k(y,y,x),y)$	**14**	9	8	$f_n(y,y,f_k(x,y,x))$
7	2	3	$f_n(x,f_k(x,y,y),y)$	**15**	7	5	$f_n(x,y,f_k(x,y,y))$
8	5	2	$f_n(y,x,f_k(x,x,y))$	**16**	8	7	$f_n(x,x,f_k(y,x,y))$

Таблица 2.1.2(окончание)

№	n	k	$h(x,y)$	№	n	k	$h(x,y)$
17	7	8	$f_n(y,f_k(x,y,x),y)$	**24**	7	8	$f_n(f_k(x,y,x),x,y)$
18	5	9	$f_n(x,f_k(y,x,x),y)$	**25**	6	7	$f_n(f_k(y,y,x),y,x)$
19	5	10	$f_n(y,f_k(x,y,x),x)$	**26**	9	2	$f_n(x,f_k(y,y,x),y)$
20	10	9	$f_n(x,f_k(x,x,y),y)$	**27**	2	10	$f_n(x,y,f_k(x,y,x))$
21	10	5	$f_n(f_k(x,x,y),y,x)$	**28**	3	9	$f_n(f_k(y,y,x),x,x)$
22	7	9	$f_n(f_k(y,y,x),x,y)$	**29**	10	7	$f_n(y,x,f_k(x,y,x))$
23	8	7	$f_n(f_k(x,y,y),y,x)$	**30**	8	3	$f_n(x,f_k(y,y,x),y)$

Пример решения задания 2.1.2

Написать таблицу функции $h(x,y) = f_2(y,y,f_1(x,y,x))$.

Сначала запишем таблицу функций f_1 и f_2 (табл. 2.1.2а):

Таблица 2.1.2а

xyz	f_1	f_2
000	1	0
001	0	1
010	0	1
011	1	0
100	0	1
101	1	0
110	1	1
111	1	1

Составим таблицу функции $h(x,y)$. Для этого запишем формулу, задающую функцию $h(x,y)$, выпишем под символами переменных все наборы значений, которые эти переменные принимают, а под символами булевых функций будем выписывать значения функций, соответствующие этим наборам.

Заключительный столбец, задающий функцию h, обведём двойной рамкой.

$h($	$x,$	$y) =$	$f_2($	$y,$	$y,$	$f_1($	$x,$	$y,$	$x)$
	0	0	1	0	0	1	0	0	0
	0	1	1	1	1	0	0	1	0
	1	0	1	0	0	1	1	0	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Итак, $h(x,y) = (1111)$.

Задание 2.1.3

Для данной функции $f(x,y,z)$

1. Выяснить, какие её переменные являются существенными, а какие - фиктивными.

2. Выразить $f(x,y,z)$ формулой, содержащей только существенные переменные.

Таблица 2.1.3

№	$f(x,y,z)$	**№**	$f(x,y,z)$	**№**	$f(x,y,z)$
1	1011 1011	**11**	0101 0000	**21**	1010 0101
2	0011 1100	**12**	1100 1100	**22**	0011 0011

3	0101 1111	**13**	0100 0100	**23**	1011 1011
4	1000 1000	**14**	1111 0011	**24**	1111 1100
5	1010 0000	**15**	0000 0101	**25**	0110 0110
6	1100 1111	**16**	0000 0011	**26**	1010 1111
7	0010 0010	**17**	0011 0000	**27**	1010 1010
8	1100 0011	**18**	1101 1101	**28**	1110 1110
9	0000 1010	**19**	1111 0101	**29**	0001 0001
10	1001 1001	**20**	0111 0111	**30**	0011 1111

Пример решения задания 2.1.3

Для данной функции $f(x,y,z) = (0101\ 1010)$

1. Выяснить, какие её переменные являются существенными, а какие - фиктивными.

2. Выразить $f(x,y,z)$ *формулой, содержащей только существенные переменные.*

Таблица 2.1.3а

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

1. Переменная x является существенной для данной бф, так как, например, наборы (0,0,0) и (1,0,0) являются соседними по переменной x и $f(0{,}0{,}0) \neq f(1{,}0{,}0)$.

Переменная z является существенной для данной бф, так как, например, наборы (0,0,0) и (0,0,1) являются соседними по переменной z и $f(0{,}0{,}0) \neq f(0{,}0{,}1)$.

Переменная y является фиктивной для данной бф, так как на всех наборах, соседних по переменной y, значения функции равны, то есть выполняются равенства:

$$f(0{,}0{,}0) = f(0{,}1{,}0),\ f(1{,}0{,}0) = f(1{,}1{,}0),$$
$$f(0{,}0{,}1) = f(0{,}1{,}1),\ f(1{,}0{,}1) = f(1{,}1{,}1).$$

2. Выпишем таблицу функции f, как функцию только от существенных переменных (табл. 2.1.3в):

Таблица 2.1.3в

x	z	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Видим, что функция $f(x,z) = x + z$.

Задание 2.1.4

1. Написать таблицу булевой функции $f(x,y,z)$, заданной формулой.

2. Найти фиктивные переменные данной функции.

3. Преобразовать данную формулу в эквивалентную ей, но не содержащую фиктивных переменных.

Таблица 2.1.4

№	$f(x,y,z)$	№	$f(x,y,z)$
1	$x\bar{y}z\vee\overline{\bar{x}\vee y\vee z}\vee x\bar{y}\vee x\bar{y}\bar{z}$	**11**	$xy\bar{z}\vee\overline{x\vee\bar{y}\vee z}\vee y\bar{z}\vee\bar{x}y\bar{z}$
2	$xy\bar{z}\vee yz\vee\bar{x}\vee\overline{x\vee y\vee z}$	**12**	$\bar{x}\bar{y}z\vee x\bar{y}\vee yz\vee\overline{x\vee y\vee z}$
3	$xy\bar{z}\vee\bar{x}\bar{y}\vee\overline{x\vee y\vee z}\vee xyz$	**13**	$\bar{y}\bar{z}\vee\bar{x}yz\vee\overline{x\vee y\vee z}\vee xyz$
4	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}\vee\overline{x\vee y}\vee\bar{x}\bar{y}z\vee\overline{x\vee y\vee z}$	**14**	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}\vee\overline{y\vee z}\vee\overline{x\vee y\vee z}\vee x\bar{y}\bar{z}$
5	$\bar{y}z\vee\bar{x}y\bar{z}\vee x\bar{y}\bar{z}\vee\bar{x}y\vee\overline{x\vee y\vee z}$	**15**	$x\bar{z}\vee\bar{x}\bar{y}z\vee\overline{x\vee y\vee z}\vee\bar{x}y\bar{z}\vee\bar{y}z$
6	$\bar{x}y\bar{z}\vee\overline{x\vee\bar{y}}\vee\overline{x\vee\bar{y}\vee z}\vee\bar{x}yz$	**16**	$\bar{x}\bar{y}z\vee\overline{y\vee\bar{z}}\vee x\bar{y}z\vee\overline{x\vee y\vee\bar{z}}$
7	$x\bar{y}z\vee\bar{x}y\bar{z}\vee\overline{\bar{x}\vee y}\vee\bar{x}yz$	**17**	$xy\bar{z}\vee\bar{x}\bar{y}z\vee\overline{\bar{y}\vee z}\vee x\bar{y}z$
8	$xyz\vee\bar{y}z\vee\bar{x}z\vee\overline{x\vee y\vee z}$	**18**	$xyz\vee x\bar{z}\vee\bar{x}y\vee\overline{x\vee y\vee z}$
9	$xy\bar{z}\vee\overline{\bar{x}\vee\bar{y}}\vee xyz\vee\overline{\bar{x}\vee\bar{y}\vee z}$	**19**	$\bar{x}yz\vee\overline{\bar{z}\vee\bar{y}}\vee xyz\vee\overline{x\vee\bar{y}\vee\bar{z}}$
10	$xy\bar{z}\vee yz\vee x\bar{y}\vee\overline{x\vee\bar{y}}$	**20**	$\bar{x}yz\vee xz\vee y\bar{z}\vee\overline{y\vee\bar{z}}$

Таблица 2.1.4(окончание)

№	$f(x,y,z)$	№	$f(x,y,z)$
21	$\bar{x}yz\vee\overline{x\vee y\vee\bar{z}}\vee\bar{x}z\vee\bar{x}\bar{y}z$	**26**	$x\bar{y}\bar{z}\vee\overline{\bar{x}\vee z}\vee xy\bar{z}\vee\overline{\bar{x}\vee y\vee z}$
22	$\overline{x\vee y\vee z}\vee\bar{x}y\bar{z}\vee xyz\vee\overline{\bar{x}\vee y\vee\bar{z}}$	**27**	$\bar{x}yz\vee x\bar{y}\bar{z}\vee\overline{x\vee y\vee\bar{z}}\vee xy\bar{z}$
23	$\bar{x}\bar{z}\vee x\bar{y}z\vee xyz\vee\overline{x\vee y\vee z}$	**28**	$xyz\vee\bar{x}y\vee\overline{x\vee y\vee z}\vee\bar{y}z$
24	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}\vee\overline{x\vee z}\vee\bar{x}y\bar{z}\vee\overline{x\vee y\vee z}$	**29**	$x\bar{y}z\vee\overline{\bar{x}\vee\bar{z}}\vee\overline{\bar{x}\vee y\vee\bar{z}}\vee xyz$
25	$\bar{x}y\vee x\bar{y}\bar{z}\vee\bar{x}\bar{y}z\vee\bar{x}z\vee\overline{x\vee y\vee z}$	**30**	$x\bar{y}z\vee xy\vee\overline{\bar{x}\vee z}\vee\bar{x}z$

Выполним задание 2.1.4 для функции

$$f(x,y,z) = xy \vee \bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee yz \vee \overline{x \vee \bar{y} \vee z}$$

Таблица 2.1.4а

xyz	f
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	1
110	1
111	1

1. При отыскании таблицы значений для данной функции (табл. 2.1.4а) заметим, что из определения дизъюнкции и конъюнкции следует, что для построения таблицы функции, имеющей вид дизъюнкции нескольких выражений, нужно найти единичные наборы для каждого из этих выражений, тогда объединение множеств единичных наборов и даст множество единичных наборов исходной функции.

2. Рассмотрим пары наборов, соседних по переменной x и значения функции на этих наборах:

$f(0,0,0) = f(1,0,0) = 0;\ f(0,0,1) = f(1,0,1) = 1;$

$f(0,1,0) = f(1,1,0) = 1;\ f(0,1,1) = f(1,1,1) = 1.$

Значит, x - фиктивная переменная.

Так как $f(0,0,0) \neq f(0,0,1)$, значит z - существенная переменная.

Неравенство $f(0,0,0) \neq f(0,1,0)$ показывает, что y - также существенная переменная.

3. Преобразуем формулу к виду, не содержащему фиктивной переменной.

$$xy \vee \bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee yz \vee \overline{x \vee \bar{y} \vee z} = xy \vee \bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee yz \vee \bar{x}y\bar{z} =$$

$$= xy \vee \bar{y}z \vee yz \vee \bar{x}y\bar{z} = xy \vee (\bar{y} \vee y)z \vee \bar{x}y\bar{z} = xy \vee 1 \cdot z \vee \bar{x}y\bar{z} =$$

$$= xy \vee z \vee \bar{x}y\bar{z} = xy \vee z \vee \bar{x}y = z \vee xy \vee \bar{x}y = z \vee (x \vee \bar{x})y =$$

$$= z \vee 1 \cdot y = z \vee y$$ Итак, $f(x,y,z) = z \vee y.$

2.2. Булевы функции и теория множеств

Пусть множества $B_1, B_2, \ldots, B_m$ составлены из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ с помощью формул, содержащих теоретико-множественные операции $\cup$, $\cap$, $\setminus$, Δ, $-$.

Тогда любому из множеств B_i, $i=1,\ldots,m$ можно поставить в соответствие булеву функцию $f_i(a_1,a_2,\ldots a_n)$, $i=1,\ldots,m$, полученную из формулы, задающей B_i, заменой имён множеств A_i на символы переменных a_i, символ $\cup$ заменяется на $\vee$, $\cap$ на $\wedge$, \ на $\not\to$, Δ на $+$, знак дополнения — понимается, как отрицание. Тогда $B_1=B_2 \Leftrightarrow f_1\equiv f_2$,

$B_1\subseteq B_2 \Leftrightarrow f_1\to f_2\equiv 1$, $\quad B_1\cap B_2=\varnothing \Leftrightarrow f_1\wedge f_2\equiv 0$.

Если между множествами $B_1,B_2,\ldots,B_m$ записано соотношение, содержащее кроме символов теоретико-множественных операций, символы: $\times$ (декартово произведение), $\subseteq$ (включение), = (равенство), $\varnothing$ (пустое множество), U (универсальное множество), то в соответствующей формуле для булевой функции делается замена $\times$ на $\wedge$, $\subseteq$ на $\to$, = на $\leftrightarrow$, $\varnothing$ на 0, U на 1.

Тогда исходное соотношение будет истинным для любых множеств $B_1,B_2,\ldots,B_m$ тогда и только тогда, когда соответствующая этому соотношению булева функция будет тождественно равна 1.

Задание 2.2.1

Выяснить взаимное расположение множеств D, E, F, если A, B, C - произвольные подмножества универсального множества U.

Таблица 2.2.1

1	***D***	$B\cup\overline{C}$	**2**	***D***	$(A\cap B)\cup(A\setminus C)\cup\overline{B\cup C}$
	E	$(B\cap C)\cup(\overline{C}\setminus(A\cap B))$		***E***	$A\cup\overline{B}\cup C$
	F	$(\overline{B}\cap\overline{C})\cup(B\cap(C\setminus A))$		***F***	$(\overline{B}\cap\overline{C})\cup(B\cap A)$
3	***D***	$(A\Delta C)\cup(B\cap A)$	**4**	***D***	$(B\cap C)\cup\overline{A\cup C}$
	E	$A\cup C$		***E***	$((B\cup\overline{C})\setminus A)\cup(C\cap B))$
	F	$(A\setminus C)\cup(B\cap C)\cup(C\setminus A)$		***F***	$\overline{A}\cup C$
5	***D***	$(C\cap B)\cup(A\setminus B)\cup\overline{A\cup C}$	**6**	***D***	$\overline{A\cup B}\cup(C\cap B)$
	E	$A\cup B\cup\overline{C}$		***E***	$(\overline{B}\cap\overline{A})\cup(C\cap(B\setminus A))$
	F	$(A\Delta B)\cup(C\cap A)\cup\overline{C\cup B}$		***F***	$\overline{A}\cup C$
7	***D***	$\overline{A\Delta C}\cup(C\setminus B)$	**8**	***D***	$(A\setminus C)\cup\overline{A\cup B}$
	E	$(\overline{B\cap C}\setminus A)\cup(C\cap A)$		***E***	$(\overline{B}\cap\overline{A})\cup((A\setminus B)\setminus C)$
	F	$A\cup\overline{C}\cup\overline{B}$		***F***	$(A\setminus C)\cup\overline{B}$
9	***D***	$\overline{A\Delta C}\cup(A\cap B)$	**10**	***D***	$(\overline{B\cap C}\setminus A)\cup(C\setminus B)$
	E	$(A\cap C)\cup((A\setminus B)\setminus C)$		***E***	$\overline{A\cup C}\cup(C\cap\overline{B})$
	F	$A\cup\overline{C}$		***F***	$\overline{A}\cup C$
11	***D***	$(A\Delta B)\cup(C\setminus A)$	**12**	***D***	$\overline{A\Delta C}\cup(C\cap(B\setminus A))$
	E	$((A\cup C)\setminus B)\cup((C\cup B)\setminus A)$		***E***	$(A\cap B)\cup((C\setminus B)\setminus A)$
	F	$\overline{A}\cup(A\setminus B)$		***F***	$\overline{A}\cup B$
13	**D**	$\overline{A\Delta C}\cup(X\setminus B)$	**14**	***D***	$(A\Delta B)\cup(C\cap B)$
	E	$\overline{A}\cup C$		***E***	$A\cup B$
	F	$(\overline{A}\cap\overline{C})\cup(C\cap(A\setminus B))$		***F***	$(B\setminus A)\cup(A\cap C)\cup(A\setminus B)$

Таблица 2.2.1(окончание)

15	***D***	$\overline{A\cup B}\cup(C\cap A)$	**16**	***D***	$(C\cap B)\cup(B\setminus A)\cup\overline{A\cup C}$
	E	$A\cup\overline{B}$		***E***	$(\overline{A}\cap\overline{C})\cup(C\cap B)$

	F	$((C\cup\overline{A})\setminus B)\cup(C\cap A))$		***F***	$A\cup\overline{C}\cup B$
17	***D***	$(A\cap C)\cup(B\setminus C)\cup\overline{A\cup B}$	**18**	***D***	$(A\cap C)\cup\overline{B\cup C}$
	E	$(C\triangle B)\cup(B\cap A)\cup\overline{C\cup B}$		***E***	$A\cup\overline{B}$
	F	$C\cup\overline{A}\cup B$		***F***	$(\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap(C\setminus B))$
19	***D***	$\overline{A\triangle B}\cup(A\setminus C)$	**20**	***D***	$\overline{C\cup B}\cup(B\setminus A)$
	E	$B\cup\overline{C}\cup\overline{A}$		***E***	$(B\setminus A)\cup\overline{C}$
	F	$(\overline{A\cap C}\setminus B)\cup(A\cap B)$		***F***	$(\overline{B}\cap\overline{C})\cup((B\setminus C)\setminus A)$
21	***D***	$\overline{A}\cup B$	**22**	***D***	$\overline{A\cup B}\cup(\overline{C}\cap A)$
	E	$(A\cap B)\cup((B\setminus C)\setminus A)$		***E***	$A\cup(A\setminus B)$
	F	$\overline{A\triangle B}\cup(C\cap B)$		***F***	$(\overline{A\cap C}\setminus B)\cup((A\setminus C)$
23	***D***	$(B\setminus C)\cup\overline{B}$	**24**	***D***	$\overline{B\triangle C}\cup(A\cap(C\setminus B))$
	E	$(B\triangle C)\cup(A\setminus B)$		***E***	$\overline{B}\cup C$
	F	$((B\cup A)\setminus C)\cup((C\cup A)\setminus B)$		***F***	$(B\cap C)\cup((A\setminus C)\setminus B))$
25	***D***	$B\cup C$	**26**	***D***	$((A\setminus B)\cap C)\cup\overline{A\cup C}$
	E	$((C\triangle B)\cap B)\cup(C\cap(A\cup B))$		***E***	$(A\cap C)\cup(\overline{A}\setminus(C\cap B))$
	F	$(B\cap A)\cup(B\cap C)$		***F***	$\overline{A}\cup C$
27	***D***	$(C\cap B)\cup(B\setminus A)\cup\overline{A\cup C}$	**28**	***D***	$\overline{A\cup B}\cup(C\cap A)$
	E	$A\cup B\cup\overline{C}$		***E***	$((C\cup\overline{A})\setminus B)\cup(C\cap A)$
	F	$(C\cap B)\cup\overline{C\cup A}$		***F***	$\overline{B}\cup A$
29	***D***	$(A\triangle B)\cup(C\cap B)$	**30**	***D***	$(A\cap C)\cup\overline{C\cup B}$
	E	$B\cup A$		***E***	$(\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap(C\setminus B))$
	F	$(A\setminus B)\cup(A\cap C)\cup(B\setminus A)$		***F***	$\overline{B}\cup A$

<u>Примеры решения задания 2.2.1</u>

Пример 1.

Выяснить взаимное расположение множеств $D=(B\backslash C)\cup(A\backslash B)$, $E=A\backslash(B\backslash C)$, $F=A\cup B$, если A, B, C - произвольные подмножества универсального множества U.

Найдём соответствующие булевы функции:

$f_D(a,b,c)=(b\not\to c)\vee(a\not\to b)$, $f_E(a,b,c)=a\not\to(b\not\to c)$,

$f_F(a,b,c)=a\vee b$ и, построив таблицы, найдём векторы значений этих функций: $f_D=(0010\ 1110)$, $f_E=(0000\ 1101)$, $f_F=(0011\ 1111)$.

Так как множество единичных наборов функций f_D и f_E строго включены в множество единичных наборов функции f_F, то $f_D\to f_F\equiv 1$ и $f_E\to f_F\equiv 1$, но $f_D\neq f_F$ и $f_E\neq f_F$, значит $D\subseteq F$ и $E\subseteq F$.

Выясним взаимное расположение множеств D и E:

$$\left.\begin{array}{l} f_D(0,1,0)=1 \text{ и } f_E(0,1,0)=0 \ \Rightarrow D\not\subseteq E \\ f_D(1,1,1)=0 \text{ и } f_E(1,1,1)=1 \ \Rightarrow E\not\subseteq D \\ f_D(1,1,1)=0 \text{ и } f_E(1,0,0)=1 \ \Rightarrow D\cap E\neq\varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow \ E \mathbin{\bigcirc\!\!\!\!\bigcirc} D$$

<u>Пример 2.</u> Решить задание 2.2.2 для множеств $E=\overline{B\triangle C}\cup(B\backslash A)$ $D=\overline{A\cup C}\cup(B\cap C)\cup(\overline{B}\cap\overline{C})$ $F=B\cup\overline{C}$.

Найдём соответствующие булевы функции и векторы их значений:

$f_E=\overline{b+c}\vee(b\not\to a)=(1011\ \ 1001\ )$

$f_D=\overline{a\vee c}\vee(b\wedge c)\vee(\bar{b}\vee\bar{c})=(1011\ \ 1001)$

$f_F=b\vee\bar{c}=(1011\ \ 1011)$

Так как $f_E\equiv f_D$, то $E=D$. Заметим, что $f_E\neq f_F$, и, построив таблицу, можем убедиться, что $f_E\to f_F\equiv 1$.

Значит, справедливы соотношения: $E=D\subseteq F$.

Задание 2.2.2

Проверить, что для любых множеств A, B, C выполнение включения α влечёт выполнение включения β.

Таблица 2.2.2

№	α	β
1	$A\cap B\subseteq C$	$A\cup B\subseteq(A\Delta B)\cup(A\cap C)$
2	$A\cap B\subseteq C$	$A\setminus C\subseteq(A\setminus B)\cup C$
3	$A\cap B\subseteq C$	$A\Delta C\subseteq(A\setminus B)\cup C$
4	$A\cap B\subseteq C$	$(B\setminus C)\cup(A\setminus C)\subseteq A\Delta B$
5	$A\cap B\subseteq C$	$B\subseteq(B\setminus A)\cup C$
6	$A\subseteq B\cup C$	$A\Delta C\subseteq(A\cap B)\cup C$
7	$A\subseteq B\cup C$	$A\setminus B\subseteq A\cap C$
8	$A\subseteq B\cup C$	$A\cup B\subseteq B\cup C$
9	$A\subseteq B\cup C$	$(A\setminus B)\cup(A\cap C)\subseteq C$
10	$A\subseteq B\cup C$	$(A\setminus C)\cup(B\setminus C)\subseteq B$
11	$A\subseteq B\cup C$	$(A\setminus B)\setminus C\subseteq C\setminus A$
12	$A\cup B\subseteq C$	$A\Delta B\subseteq(A\cap B)\cup C$
13	$A\cup B\subseteq C$	$A\cap C\subseteq A\cup(B\setminus A)$
14	$A\cup B\subseteq C$	$A\cap B\subseteq(B\cap C)\cup(A\cap C)$
15	$A\cup B\subseteq C$	$B\setminus A\subseteq B\cap C$
16	$A\subseteq B\setminus C$	$A\cap B\subseteq A\setminus C$
17	$A\subseteq B\setminus C$	$C\cap B\subseteq B\setminus A$
18	$A\cup B\subseteq C$	$A\Delta C\subseteq C\setminus A$
19	$A\cup B\subseteq C$	$(B\setminus C)\cup(A\setminus B)\subseteq A\cap C$
20	$A\cup B\subseteq C$	$B\subseteq A\cup(C\setminus A)$
21	$B\setminus C\subseteq A$	$A\cup B\subseteq(B\cap C)\cup A$
22	$B\setminus C\subseteq A$	$B\Delta C\subseteq C\cup(A\cap B)$
23	$B\setminus C\subseteq A$	$B\setminus A\subseteq(C\setminus A)\cup(A\cap B)$
24	$B\setminus C\subseteq A$	$B\subseteq C\cup(B\cap A)$
25	$B\setminus C\subseteq A$	$B\Delta C\subseteq C\cup A$

Таблица 2.2.2(окончание)

№	α	β
26	$B \setminus C \subseteq A$	$B \subseteq C \cup (A \setminus C)$
27	$B \subseteq C \setminus A$	$A \cup (B \setminus C) \subseteq A \setminus B$
28	$B \subseteq C \setminus A$	$(A \setminus B) \cup ((B \setminus C) \setminus A) \subseteq A$
29	$B \subseteq C \setminus A$	$(B \setminus C) \cup (B \setminus A) \subseteq B \cap C$
30	$B \subseteq C \setminus A$	$C \cup B \subseteq (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

Пример решения задания 2.2.2

Проверить, что для любых множеств A, B, C выполнение включения $A \setminus B \subseteq C$ влечёт выполнение включения $C \vartriangle A \subseteq (A \cap B) \cup C$.

Составим булеву функцию, соответствующую высказыванию, которое надо доказать:

$$f(a,b,c) = ((a \not\to b) \to c) \to (c + a \to a \wedge b \vee c)$$

Построим таблицу, убедимся, что заключительный столбец, являющийся вектором значений функции $f(a,b,c)$ состоит из одних единиц, что доказывает справедливость требуемого утверждения.

Задание 2.2.3

Для произвольных множеств A, B, H проверить, является ли выполнение включения α необходимым и достаточным условием выполнения равенства β.

Таблица 2.2.3

№	α	β
1	$A \subseteq B \setminus H$	$H \setminus A = H \cup (A \setminus B)$
2	$A \subseteq B \setminus H$	$H = (H \setminus A) \cup ((A \setminus B) \setminus H)$
3	$A \subseteq B \setminus H$	$A \cap B = (A \setminus H) \cup (A \setminus B)$
4	$A \subseteq B \setminus H$	$B = (A \vartriangle B) \cup (A \setminus H)$
5	$A \subseteq B \setminus H$	$A \cup B = (B \setminus H) \cup (B \setminus A)$

6	$A \subseteq B \setminus H$	$B \setminus A = (A \Delta B) \cup (B \cap H)$

Таблица 2.2.3(окончание)

№	**α**	**β**
7	$A \subseteq B \setminus H$	$A \Delta H = H \cup (A \cap B)$
8	$A \subseteq B \setminus H$	$A \Delta B = (B \setminus A) \cup (H \cap B)$
9	$A \subseteq B \setminus H$	$A \cup H = (H \setminus A) \cup ((A \cap B) \setminus H)$
10	$A \subseteq B \setminus H$	$A \cap B = (A \setminus B) \setminus H$
11	$A \subseteq B \setminus H$	$A \setminus H = A \cap (B \cup H)$
12	$A \subseteq B \setminus H$	$A \setminus B = A \cap B \cap H$
13	$A \subseteq B \cap H$	$H = (A \Delta H) \cup (B \cap A)$
14	$A \subseteq B \cap H$	$A \cup B = (B \cap H) \cup (B \setminus A)$
15	$A \subseteq B \cap H$	$A \Delta B = (B \setminus H) \cup (B \setminus A)$
16	$A \subseteq B \cap H$	$B \setminus H = (A \setminus B) \cup ((B \setminus A) \setminus H)$
17	$A \subseteq B \cap H$	$(B \setminus A) \setminus H = (B \setminus H) \cup (A \setminus B)$
18	$A \subseteq B \cap H$	$A \cap B = (A \setminus B) \cup (A \cap H)$
19	$A \subseteq B \cap H$	$A \setminus H = (A \cap H) \setminus B$
20	$A \subseteq B \cap H$	$H \setminus A = (A \Delta H) \cup (A \setminus B)$
21	$A \cup B \subseteq H$	$B \setminus A = (A \setminus H) \cup ((B \cap H) \setminus A)$
22	$A \cup B \subseteq H$	$A \cup H = H \cup (B \setminus A)$
23	$A \cup B \subseteq H$	$A \cap H = A \cup (B \setminus H)$
24	$A \cup B \subseteq H$	$H \setminus A = (A \Delta H) \cup (B \setminus A)$
25	$A \cup B \subseteq H$	$B \Delta H = (A \setminus B) \cup (H \setminus B)$
26	$A \cup B \subseteq H$	$A \cap B = ((A \Delta B) \setminus H) \cup (A \cap B \cap H)$
27	$A \cup B \subseteq H$	$A \Delta B = (H \cap (A \Delta B)) \cup ((A \cap B) \setminus H)$
28	$A \cap B \subseteq H$	$H \setminus A = (A \Delta H) \setminus (A \setminus B)$
29	$A \cap B \subseteq H$	$B \setminus H = (B \setminus A) \setminus H$
30	$A \cap B \subseteq H$	$A \cup B = (A \Delta B) \cup (B \cap H)$

Пример решения задания 2.2.3

Для произвольных множеств A, B, H *проверить, является ли выполнение включения* $A \cup B \subseteq H$ *необходимым и достаточным условием выполнения равенства* $A \Delta H = (B \setminus A) \cup (H \setminus A)$.

Составим булеву функцию, соответствующую высказыванию, которое надо доказать:

$$f(a,b,h) = ((a \vee b) \to h) \leftrightarrow (a + h \leftrightarrow ((b \not\to a) \vee (h \not\to a)))$$

Построим таблицу, убедимся, что заключительный столбец, являющийся вектором значений функции $f(a,b,h)$ состоит из одних единиц, что доказывает справедливость требуемого утверждения.

Задание 2.2.4

Выяснить, верно ли равенство α для произвольных A, B, C.

Таблица 2.2.4

№	α
1	$A \times C = (A \times (C \setminus B)) \cup (A \times (C \cap B))$
2	$A \times C = (A \times (C \cap B)) \cup (A \times C)$
3	$A \times (B \Delta C) = (A \times (B \cup C) \setminus (A \times (C \cap B))$
4	$A \times C = (A \times (C \setminus B)) \cup (A \times C)$
5	$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times (C \setminus B))$
6	$A \times (C \setminus B) = (A \times C) \Delta (A \times (C \cap B))$
7	$A \times C = (A \times (C \cup B)) \cap (A \times C)$
8	$A \times (C \cap (B \Delta C)) = (A \times C) \Delta (A \times (C \cap B))$
9	$A \times (C \setminus B) = (A \times C) \setminus (A \times (C \cap B))$
10	$A \times (B \cup C) = (A \times (B \Delta C)) \cup (A \times (B \cap C))$
11	$A \times C = (A \times (C \cup B)) \setminus (A \times (B \setminus C))$
12	$A \times (B \cap C) = (A \times C) \setminus (A \times (C \setminus B))$
13	$A \times (B \cap C) = (A \times (B \cup C)) \setminus (A \times (B \Delta C))$

14	$A\times(C\setminus B)=(A\times(B\cup C))\setminus(A\times B)$
15	$B\times A=(B\times(A\setminus C))\cup(B\times(A\cap C))$

Таблица 2.2.4(окончание)

№	α
16	$B\times A=(B\times(A\cap C))\cup(B\times A)$
17	$B\times A=(B\times A)\cup(B\times(A\setminus C))$
18	$B\times(A\cup C)=(B\times(A\setminus C))\cup(B\times C)$
19	$B\times A=(B\times A)\cap(B\times(A\cup C))$
20	$B\times(A\setminus C)=(B\times A)\setminus(B\times(A\cap C))$
21	$B\times A=(B\times(A\cup C))\setminus(B\times(C\setminus A))$
22	$B\times(A\cap C)=(B\times A)\setminus(B\times(A\setminus C))$
23	$B\times(A\setminus C)=(B\times A)\Delta(B\times(A\cap C))$
24	$B\times(A\setminus C)=(B\times(A\cup C))\setminus(B\times C)$
25	$C\times B=(C\times(B\setminus A))\cup(C\times(B\cap A))$
26	$C\times B=(C\times(B\cap A))\cup(C\times B)$
27	$C\times(A\Delta B)=(C\times(A\cup B)\setminus(C\times(A\cap B))$
28	$C\times B=(C\times(B\setminus A))\cup(C\times B)$
29	$C\times(A\cup B)=(C\times A)\cup(C\times(B\setminus A))$
30	$C\times(B\setminus A)=(C\times B)\Delta(C\times(A\cap B))$

Пример решения задания 2.2.4

Выяснить, верно ли равенство

$C\times(B\setminus A)=(C\times B)\Delta(C\times(A\cap B))$ *для произвольных* A, B, C.

Составим булеву функцию, соответствующую высказыванию, которое надо доказать:

$$f(a,b,c)=(c\wedge(b\nrightarrow a))\leftrightarrow(c\wedge b)+(c\wedge(a\wedge b))$$

Построим таблицу, убедимся, что заключительный столбец, являющийся вектором значений функции $f(a,b,c)$ состоит из одних единиц, что доказывает справедливость требуемого утверждения.

2.3. Нормальные формы и полиномы

Возведение в степень булевых переменных определяется так: $x^1 = x,\ x^0 = \overline{x}$.

Элементарной конъюнкцией называется выражение

$x_{i_1}^{a_{i_1}} \cdot x_{i_2}^{a_{i_2}} \cdot \ldots \cdot x_{i_m}^{a_{i_m}}$, где все переменные, вошедшие в состав конъюнкции, различны, $m \ge 1$.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) данной булевой функции называется её представление в виде дизъюнкции некоторых элементарных конъюнкций.

Для любой булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ справедлива *формула дизъюнктивного разложения по совокупности переменных:*

$$f(x_1, x_2, .. x_n) = \bigvee_{(a_1, a_2, \ldots, a_k)} x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{a_k} \cdot f(a_1, \ldots, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

Заметим, что эта формула остаётся справедливой и для разложения не только по первым k переменным.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) данной булевой функции называется её представление в виде:

$$f(x_1, x_2, .. x_n) = \bigvee_{\substack{(a_1, a_2, \ldots a_n) \\ f(a_1, a_2, \ldots a_n) = 1}} x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n}$$

Элементарной дизъюнкцией называется выражение $x_{i_1}^{a_{i_1}} \vee x_{i_2}^{a_{i_2}} \vee \ldots \vee x_{i_m}^{a_{i_m}}$, где все переменные, вошедшие в состав дизъюнкции, различны, $m \ge 1$.

Для любой булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ справедлива *формула конъюнктивного разложения по совокупности переменных:*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{(a_1, a_2, \ldots a_k)} (x_1^{\overline{a1}} \vee x_2^{\overline{a2}} \vee \ldots \vee x_k^{\overline{ak}} \vee f(a_1, a_2, .. a_k, x_{k+1}, \ldots, x_n))$$

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) данной булевой функции называется её представление в виде конъюнкции некоторых элементарных дизъюнкций.

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) данной булевой функции называется её представление в виде:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \bigwedge_{\substack{(a_1, a_2, \ldots a_n) \\ f(a_1, a_2, \ldots a_n)=0}} (x_1^{\overline{a_1}} \vee x_2^{\overline{a_2}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{a_n}})$$

Полиномом Жегалкина булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется её представление в виде суммы по модулю два некоторых элементарных конъюнкций и, быть может, константы 1.

Полином Жегалкина может быть найден с помощью формулы

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{\substack{(a_1, a_2, \ldots a_n) \\ f(a_1, a_2, \ldots a_n)=1}} (x_1 + \overline{a_1}) \cdot (x_2 + \overline{a_2}) \cdot \ldots \cdot (x_n + \overline{a_n}),$$

в которой нужно раскрыть скобки и упростить выражение с помощью соотношений:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \qquad x + 1 = \overline{x}, \qquad x + 0 = x, \quad x + x = 0.$$

Задание 2.3.1

Преобразовать $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, используя формулу дизъюнктивного разложения по совокупности переменных x_n, x_k, представляя получаемые функции от двух переменных формулами над множеством элементарных связок : отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, сумма по модулю два, эквиваленция, запрет, штрих Шеффера, стрелка Пирса.

Таблица 2.3.1

№	*f*	*n*	*k*	№	*f*	*n*	*k*
1	0110 1110 1101 1001	1	2	**9**	1010 1110 0110 0101	1	4
2	0110 1110 1101 1001	1	3	**10**	1010 1110 0110 0101	2	3
3	0110 1110 1101 1001	1	4	**11**	1010 1110 0110 0101	2	4
4	0110 1110 1101 1001	2	3	**12**	1010 1110 0110 0101	3	4
5	0110 1110 1101 1001	2	4	**13**	1100 0100 0111 0110	1	2
6	0110 1110 1101 1001	3	4	**14**	1100 0100 0111 0110	1	3
7	1010 1110 0110 0101	1	2	**15**	1100 0100 0111 0110	1	4
8	1010 1110 0110 0101	1	3	**16**	1100 0100 0111 0110	2	3

Таблица 2.3.1(окончание)

№	f	n	k
17	1100 0100 0111 0110	2	4
18	1100 0100 0111 0110	3	4
19	1110 0111 0101 1011	1	2
20	1110 0111 0101 1011	1	3
21	1110 0111 0101 1011	1	4
22	1110 0111 0101 1011	2	3
23	1110 0111 0101 1011	2	4
24	1110 0111 0101 1011	3	4
25	1010 0110 1111 0111	1	2
26	1010 0110 1111 0111	1	3
27	1010 0110 1111 0111	1	4
28	1010 0110 1111 0111	2	3
29	1010 0110 1111 0111	2	4
30	1010 0110 1111 0111	3	4

Пример решения задания 2.3.1

Разложим функцию $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ *= (0100 0111 1000 1011) по переменным* x_2, x_4.

Для этого случая формула дизъюнктивного разложения примет вид: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\bigvee\limits_{(a_2,a_4)} x_2^{a_2}\cdot x_4^{a_4}\cdot f(x_1,a_2,x_3,a_4)=$

$$=\bigvee\limits_{\substack{(0,0)\\(0,1)\\(1,0)\\(1,1)}} x_2^{a_2}\cdot x_4^{a_4}\cdot f(x_1,a_2,x_3,a_4)=x_2^0\cdot x_4^0\cdot f(x_1,0,x_3,0)\vee$$

$$\vee\, x_2^0\cdot x_4^1\cdot f(x_1,0,x_3,1)\vee x_2^1\cdot x_4^0\cdot f(x_1,1,x_3,0)\vee x_2^1\cdot x_4^1\cdot f(x_1,1,x_3,1)=$$

$$=\bar{x}_2\cdot\bar{x}_4\cdot f(x_1,0,x_3,0)\vee\bar{x}_2\cdot x_4\cdot f(x_1,0,x_3,1)\vee x_2\cdot\bar{x}_4\cdot f(x_1,1,x_3,0)\vee x_2\cdot x_4\cdot f(x_1,1,x_3,1)$$

Запишем таблицу функции $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ и с её помощью составим таблицы всех четырёх функций от переменных x_1, x_3.

Таблица 2.3.1а

zw \ xy	**00**	**01**	**11**	**10**
00	1	1	1	0
01	1	0	0	1
11	1	1	0	0
10	1	1	1	0

Таблица 2.3.1b

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1

x_1	x_2	x_3	x_4	f
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Таблица 2.3.1c

x_1	x_3	$f(x_1,0,x_3,0)$	$f(x_1,0,x_3,1)$	$f(x_1,1,x_3,0)$	$f(x_1,1,x_3,1)$
0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1

Как мы видим, $f(x_1,0,x_3,0) = x_1 \not\to x_3$, $f(x_1,0,x_3,1) = x_1 \downarrow x_3$, $f(x_1,1,x_3,0) = x_1 \vee x_3$, $f(x_1,1,x_3,1) = x_1 \to x_3$, значит, можно записать ответ: $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_4 \cdot (x_1 \not\to x_3) \vee \overline{x}_2 \cdot x_4 \cdot (x_1 \downarrow x_3) \vee$
$\vee\, x_2 \cdot \overline{x}_4 \cdot (x_1 \vee x_3) \vee\ x_2 \cdot x_4 \cdot (x_1 \to x_3)$.

Задание 2.3.2

1. Выяснить вопрос о равносильности ДНФ f_1, f_2, f_3 сведением их к СДНФ.

2. Преобразовать с помощью дистрибутивных законов f_2 в КНФ, упростить полученное выражение.

Таблица 2.3.2

№	f_1	f_2	f_3
1	$\overline{x}\,\overline{y} \vee x\overline{y} \vee yz$	$x\overline{y} \vee xz$	$\overline{y} \vee z$

2	$\bar{y}\bar{z}\vee xz\vee \bar{x}y\bar{z}\vee \bar{y}\bar{x}$	$\bar{y}\bar{x}\vee x\bar{y}\vee yz$	$\bar{z}\bar{x}\vee \bar{y}\vee xz$
3	$\bar{y}\bar{z}\vee xz\vee \bar{x}\bar{y}$	$y\bar{z}\vee \bar{x}y\vee \bar{y}\bar{x}\vee \bar{y}z$	$x\bar{y}z\vee xy\bar{z}\vee \bar{x}$

Таблица 2.3.2(продолжение)

№	f_1	f_2	f_3
4	$x\bar{y}\bar{z}\vee xz\vee \bar{x}yz$	$x\bar{y}\bar{z}\vee z\vee \bar{x}y$	$x\bar{y}\vee yz$
5	$\bar{y}z\vee xy\vee y\bar{z}\vee \bar{z}\bar{x}$	$\bar{y}\bar{x}\vee yz\vee xz$	$\bar{y}\bar{x}\vee y\bar{z}\vee xz$
6	$\bar{y}\bar{z}\vee xy\bar{z}\vee \bar{x}\bar{y}z$	$x\bar{z}\vee \bar{x}\bar{y}$	$x\vee \bar{x}yz$
7	$x\bar{y}\bar{z}\vee xz\vee yz\vee \bar{x}y\bar{z}$	$y\bar{x}\vee \bar{y}x\vee xz$	$z\bar{x}\vee \bar{y}x\vee \bar{z}$
8	$\bar{x}\bar{y}z\vee x\bar{y}\vee yz\vee x\bar{z}\vee \bar{x}y\bar{z}$	$yx\vee \bar{y}x\vee z$	$\bar{y}z\vee y\bar{z}\vee x\bar{z}$
9	$\bar{y}z\vee \bar{x}\bar{y}\vee y\bar{z}\vee x\bar{y}\bar{z}$	$y\bar{x}\vee \bar{y}x\vee x\bar{z}$	$\bar{y}\vee \bar{z}$
10	$x\bar{y}z\vee x\bar{z}\vee y\bar{z}\vee \bar{x}yz$	$y\bar{x}\vee \bar{y}x\vee x\bar{z}$	$\bar{x}\vee y\bar{z}$
11	$\bar{x}y\bar{z}\vee \bar{y}z\vee xy\vee x\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}\bar{x}\vee yx\vee x$	$\bar{y}z\vee y\bar{z}\vee x$
12	$\bar{x}yz\vee \bar{y}\bar{x}\vee xy\bar{z}\vee \bar{y}\bar{z}$	$y\bar{x}\vee \bar{y}\bar{z}\vee z$	$\bar{y}\bar{x}\vee z\bar{x}\vee \bar{z}x$
13	$\bar{y}\bar{z}\vee zx\vee \bar{z}y$	$yx\vee \bar{y}z$	$x\vee \bar{z}$
14	$\bar{z}\bar{y}\vee \bar{z}\bar{y}x\vee xy\vee \bar{x}\bar{z}$	$\bar{z}\bar{y}\vee y\bar{z}\vee xz$	$\bar{y}\bar{x}\vee xy\vee \bar{z}$
15	$\bar{z}y\vee \bar{y}\bar{z}\vee \bar{x}z\vee \bar{x}\bar{z}$	$\bar{z}\bar{y}\vee y\bar{z}\vee x\bar{z}\vee \bar{z}x$	$\bar{x}yz\vee \bar{y}\vee xy\bar{z}$
16	$\bar{x}y\bar{z}\vee xy\vee x\bar{y}z$	$yz\vee x\vee \bar{x}y\bar{z}$	$xz\vee y\bar{z}$
17	$x\bar{z}\vee \bar{x}\bar{y}\vee \bar{x}z\vee yz$	$xy\vee xz\vee \bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}z\vee xy\vee \bar{y}\bar{z}$
18	$\bar{x}\bar{z}\vee x\bar{y}\bar{z}\vee \bar{x}yz$	$y\bar{x}\vee \bar{y}z$	$y\vee x\bar{y}z$
19	$xy\vee \bar{x}yz\vee xz\vee \bar{x}\bar{y}z$	$xy\vee \bar{y}z\vee y\bar{z}$	$\bar{x}\vee x\bar{y}\vee y\bar{z}$
20	$x\bar{y}\bar{z}\vee \bar{y}z\vee \bar{x}y\vee \bar{x}\bar{y}z$	$\bar{y}z\vee yz\vee x$	$\bar{x}z\vee \bar{x}y\vee x\bar{z}$
21	$xz\vee \bar{x}z\vee \bar{x}y\bar{z}\vee \bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}y\vee \bar{y}z\vee y\bar{z}$	$\bar{x}\vee \bar{z}$
22	$xy\bar{z}\vee \bar{x}z\vee \bar{x}y\vee x\bar{y}z$	$\bar{x}y\vee \bar{y}z\vee y\bar{z}$	$\bar{y}\vee \bar{x}z$
23	$\bar{x}\bar{y}z\vee x\bar{z}\vee xy\vee \bar{x}y\bar{z}$	$y\vee yz\vee \bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}z\vee y\vee \bar{x}z$
24	$x\bar{y}z\vee \bar{x}\bar{z}\vee \bar{x}yz\vee \bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z\vee x\vee \bar{x}\bar{z}$	$\bar{x}y\vee x\bar{y}\vee \bar{y}\bar{z}$

25	$xy \vee \bar{x}\bar{z}$	$\bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}z$	$y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xyz$
26	$xz \vee y \vee \bar{x}\bar{y}z$	$xy \vee \bar{x}z$	$xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee yz$

Таблица 2.3.2(окончание)

№	f_1	f_2	f_3
27	$x\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee yz$	$x\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y \vee xz$	$yz \vee xy \vee \bar{x}\bar{z}$
28	$\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}$	$\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{z}$	$xy\bar{z} \vee z$
29	$yz \vee x\bar{y}z \vee xy \vee x\bar{y}\bar{z}$	$yz \vee x\bar{z} \vee \bar{x}z$	$y\bar{z} \vee \bar{y} \vee \bar{x}z$
30	$\bar{x}z \vee y \vee xz$	$\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{y}z$	$x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee \bar{y}\bar{z}$

Пример решения задания 2.3.2

Решим задание 2.3.2 для

$f_1(x,y,z) = \bar{x}\bar{y} \vee y\bar{z} \vee xz$, $f_2(x,y,z) = \bar{x} \vee xy\bar{z} \vee \bar{y}z$,

$f_3(x,y,z) = xy \vee \bar{x}\bar{z} \vee z\bar{y}$.

1. Преобразуем данные функции в СДНФ:

$$f_1(x,y,z) = \bar{x}\bar{y} \vee y\bar{z} \vee xz = \bar{x}\bar{y} \cdot 1 \vee 1 \cdot y\bar{z} \vee x \cdot 1 \cdot z =$$

$$= \bar{x}\bar{y} \cdot (z \vee \bar{z}) \vee (x \vee \bar{x}) \cdot y\bar{z} \vee x \cdot (y \vee \bar{y}) \cdot z =$$

$$= \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xyz \vee x\bar{y}z.$$

$$f_2(x,y,z) = \bar{x} \vee xy\bar{z} \vee \bar{y}z = \bar{x} \cdot (y \vee \bar{y}) \cdot (z \vee \bar{z}) \vee xy\bar{z} \vee (x \vee \bar{x})\bar{y}z =$$

$$= \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}z =$$

$$= \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z.$$

$$f_3(x,y,z) = xy \vee \bar{x}\bar{z} \vee z\bar{y} = xy(z \vee \bar{z}) \vee \bar{x}(y \vee \bar{y})\bar{z} \vee (x \vee \bar{x})z\bar{y} =$$

$$= xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}z.$$

Сравнивая СДНФ этих функций, делаем вывод, что $f_1 = f_3 \neq f_2$

2. Преобразуем f_2 в КНФ. Воспользуемся одним из дистрибутивных законов: $f_2(x,y,z)=\overline{x}\vee(x\cdot y\cdot\overline{z})\vee(\overline{y}\cdot z)=$

$$=(\overline{x}\vee x\vee\overline{y})\cdot(\overline{x}\vee y\vee\overline{y})\cdot(\overline{x}\vee\overline{z}\vee\overline{y})\cdot(\overline{x}\vee x\vee z)\cdot(\overline{x}\vee y\vee z)\cdot(\overline{x}\vee\overline{z}\vee z)=$$

$$=(1\vee\overline{y})\cdot(\overline{x}\vee 1)\cdot(\overline{x}\vee\overline{z}\vee\overline{y})\cdot(1\vee z)\cdot(\overline{x}\vee y\vee z)\cdot(\overline{x}\vee 1)=$$

$$=1\cdot 1\cdot(\overline{x}\vee\overline{z}\vee\overline{y})\cdot 1\cdot(\overline{x}\vee y\vee z)\cdot 1=(\overline{x}\vee\overline{z}\vee\overline{y})(\overline{x}\vee y\vee z).$$

Задание 2.3.3

1. Найти двумя способами полином функции, заданной векторно.
2. Найти СДНФ;
3. СКНФ данной функции.

Таблица 2.3.3.

№	f	№	f	№	f
1	1001 0111	**11**	0011 1000	**21**	0111 1001
2	0110 1011	**12**	0001 0110	**22**	0100 1010
3	1110 0110	**13**	1101 1010	**23**	0011 1000
4	0111 1001	**14**	0101 1100	**24**	1000 0111
5	1100 0111	**15**	1110 1101	**25**	0110 0011
6	1001 0100	**16**	0010 1000	**26**	0111 1010
7	1011 0101	**17**	1010 1101	**27**	1101 0111
8	1000 0110	**18**	0010 0110	**28**	0011 1110
9	1010 0110	**19**	1010 0111	**29**	1101 1000
10	0101 1000	**20**	0101 1001	**30**	0110 0101

Пример решения задания 2.3.3

Решить задание 2.3.3 для функции $f(x,y,z)=(0001\ \ 0101)$.

Запишем таблицу данной функции в развёрнутом виде:

Таблица 2.3.3а

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0

1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

1. Способ 1. Найдём полином Жегалкина данной функции, исходя из формулы:
$$f(x,y,z)=\sum_{\substack{(a,b,c)\\ f(a,b,c)=1}}(x+\bar{a})(y+\bar{b})(z+\bar{c}).$$

Получим:
$$f(x,y,z)=\sum_{\substack{(0,1,1)\\(1,0,1)\\(1,1,1)}}(x+\bar{a})(y+\bar{b})(z+\bar{c})=$$

$$=(x+1)(y+0)(z+0)+(x+0)(y+1)(z+0)+(x+0)(y+0)(z+0)=$$

$$=(x+1)yz+x(y+1)z+xyz=xyz+xz+xyz+yz+xyz=xz+yz+xyz.$$

$f(x,y,z)=xz+yz+xyz.$ Итак, $f(x,y,z)=xz+yz+xyz.$

Способ 2. Применим метод неопределённых коэффициентов. Будем искать полином для данной функции в виде:

$$f(x,y,z)=a_0+a_1x+a_2y+a_3z+a_4xy+a_5xz+a_6yz+a_7xyz. \qquad (*)$$

Используя таблицу функции, будем подставлять наборы значений переменных и значения функции в соотношение $(*)$ и последовательно находить неопределённые коэффициенты a_i:

$f(0,0,0)=0=a_0+a_1\cdot 0+a_2\cdot 0+a_3\cdot 0+a_4\cdot 0+a_5\cdot 0+a_6\cdot 0+a_7\cdot 0=a_0$
$\Rightarrow\ a_0=0,$

$f(0,0,1)=0=0+a_3\cdot 1\ \Rightarrow\ a_3=0,$

$f(0,1,0)=0=0+a_1\cdot 1=a_2\Rightarrow\ a_2=0,$

$f(0,1,1)=1=0+a_6\cdot 1=a_6\Rightarrow\ a_6=1,$

$f(1,0,0)=0=0+a_1\cdot 1=a_1\Rightarrow\ a_1=0,$

$f(1,0,1)=1=0+a_1\cdot 1+a_3\cdot 1+a_5\cdot 1=a_5\Rightarrow\ a_5=1,$

$f(1,1,0)=0=0+a_1\cdot 1+a_2\cdot 1+a_4\cdot 1=a_4\Rightarrow\ a_4=0,$

$f(1,1,1)=1=a_0+a_1\cdot 1+a_2\cdot 1+a_3\cdot 1+a_4\cdot 1+a_5\cdot 1+a_6\cdot 1+a_7\cdot 1=$

$=0+a_5\cdot 1+a_6\cdot 1+a_7\cdot 1=0+1+1+a_7=a_7\ \Rightarrow\ a_7=1.$

Получили, что $f(x,y,z) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot xy + 1 \cdot xz + 1 \cdot yz + 1 \cdot xyz =$
$= xz + yz + xyz$.

Как и следовало ожидать, результаты, найденные различными способами, совпали. Итак, $f(x,y,z) = xz + yz + xyz$.

Найдём СДНФ данной функции:

$$f(x,y,z) = \bigvee_{\substack{(a,b,c) \\ f(a,b,c)=1}} x^a y^b z^c = \bigvee_{\substack{(0,1,1) \\ (1,0,1) \\ (1,1,1)}} x^a y^b z^c = x^0 y^1 z^1 \vee x^1 y^0 z^1 \vee x^1 y^1 z^1 =$$

$$= \bar{x} yz \vee x \bar{y} z \vee xyz\,.$$

Найдём СКНФ:

$$f(x,y,z) = \bigwedge_{\substack{(a,b,c) \\ f(a,b,c)=0}} (x^{\bar{a}} \vee y^{\bar{b}} \vee z^{\bar{c}}) = \bigwedge_{\substack{(0,0,0) \\ (0,0,1) \\ (0,1,0) \\ (1,0,0) \\ (1,1,0)}} (x^{\bar{a}} \vee y^{\bar{b}} \vee z^{\bar{c}}) =$$

$$= (x^1 \vee y^1 \vee z^1) \cdot (x^1 \vee y^1 \vee z^0) \cdot (x^1 \vee y^0 \vee z^1) \cdot (x^0 \vee y^1 \vee z^1) \cdot (x^0 \vee y^0 \vee z^1) =$$
$$= (x \vee y \vee z) \cdot (x \vee y \vee \bar{z}) \cdot (x \vee \bar{y} \vee z) \cdot (\bar{x} \vee y \vee z) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)\,.$$

2.4 Классы Поста

Классами Поста называются следующие классы:

T_0, T_1, L, S, M.

Класс функций, сохраняющих константу 0:

$$T_0 = \{ f \in P_2 \mid f(0,0,\ldots,0) = 0 \}.$$

Класс функций, сохраняющих константу 1:

$$T_1 = \{f \in P_2 \mid f(1,1,\ldots,1) = 1\}.$$

Класс линейных функций:

$$L = \{f \in P_2 \mid f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n\}.$$

Класс самодвойственных функций:

$$S = \{f \in P_2 \mid \forall_{(a_1,\ldots a_n)} f(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n) = \overline{f(a_1, \ldots, a_n)}\}.$$

Говорят, что набор α *предшествует* набору β и пишут

$\alpha \preccurlyeq \beta$, если $a_i \le b_i$ для $i = 1,2,\ldots,n$.

Класс монотонных функций:

$$M = \{f \in P_2 \mid \forall_\alpha \forall_\beta \ \alpha \preccurlyeq \beta \to f(\alpha) \le f(\beta)\}.$$

Замыканием множества булевых функций $\boldsymbol{u}$ называется множество всех суперпозиций функций класса $\boldsymbol{u}$, которое обозначается $[\boldsymbol{u}]$.

Класс $\boldsymbol{u}$ называется *функционально замкнутым*, если $[\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{u}$.

Теорема. Классы Поста функционально замкнуты.

Класс функций $\boldsymbol{u}$ называется *функционально полным*, если $[\boldsymbol{u}] = P_2$.

Класс функций $\boldsymbol{u}$ называется *функционально полным в слабом смысле*, если добавление в $\boldsymbol{u}$ констант 0 и 1 превращает его в функционально полный класс.

Теорема Поста. Множество булевых функций $\boldsymbol{u}$ является функционально полным тогда и только тогда, когда для каждого из классов Поста найдётся во множестве $\boldsymbol{u}$ функция, не принадлежащая этому классу.

Задание 2.4.1

Доопределить функции $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$, $h(x,y,z)$ так, чтобы $f \in M$, $g \in L$, $h \in S$.

Если построение какой-либо функции невозможно, докажите это.

Выясните вопрос о принадлежности построенных функций к классам T_0 и T_1.

Таблица 2.4.1

№	*f*	*g*	*h*
1	(-10- 1---)	(-10- -0-0)	(-0-- 11-1)
2	(---0 1---)	(0--- 110-)	(11-- 10--)
3	(---0 -10-)	(---0 0-10)	(-1-- 01-0)
4	(-1-- --0-)	(01-0 -1--)	(101- 1---)
5	(---0 -01-)	(0-10 ---1)	(--10 --01)
6	(--1- -0--)	(-01- -1-1)	(-1-0 -1-0)
7	(-0-0 1---)	(1--- 001-)	(-00- 1--1)
8	(-1-1 --0-)	(---1 1-01)	(-1-- 10-0)
9	(-01- -0--)	(10-1 -0--)	(0--- 101-)
10	(---0 1-1-)	(1-01 ---0)	(1--1 -00-)
11	(-1-- --01)	(1-1- --00)	(1-10 --1-)
12	(0--0 1---)	(--00 1-0-)	(--10 --00)
13	(0-1- -0--)	(--10 1-1-)	(-10- 0--1)
14	(01-- --0-)	(-00- 1-1-)	(11-1 -0--)
15	(---0 1--1)	(0--- 001-)	(-010 ---1)
16	(--1- -0-1)	(-10- 0--1)	(-1-- 10-0)
17	(-1-- -10-)	(0--1 -0-0)	(00-1 -1--)
18	(--00 1---)	(--1- 11-0)	(00-0 -0--)
19	(-01- -0--)	(---0 01-0)	(01-- 01--)
20	(-1-- 0-0-)	(1--0 -1-1)	(0-10 --0-)
21	(---0 1-1-)	(--0- 00-1)	(---1 -010)
22	(--11 -0--)	(---1 10-1)	(-1-- 10-0)
23	(-10- --0-)	(1--- 110-)	(0--1 -10-)
24	(-01- -0--)	(-01- 1--0)	(-1-0 -0-1)
25	(-0-0 1---)	(-1-0 1-01)	(1--0 -10-)

Таблица 2.4.1(окончание)

№	*f*	*g*	*h*
26	(-1-1 --0-)	(1--0 -01-)	(--01 --11)
27	(-0-0 1---)	(01-1 -0--)	(0-00 --0-)
28	(--11 -0--)	(-10- 1-0-)	(0--1 -01-)
29	(-1-- 011-)	(01-- 1-0-)	(-101 ---0)
30	(---0 11--)	(-0-- 101-)	(00-0 -0--)

Пример решения задания 2.4.1

Решим задание 2.4.1 для $f = (\text{-}101\text{--}0\text{-})$, $g = (\text{---}1\text{-}010)$, $h = (1\text{-}10\text{--}1\text{-})$.

Изобразим развёрнутую таблицу данных функций:

Таблица 2.4.1а

xyz	f	g	h
000	-	-	1
001	1	-	-
010	0	-	1
011	1	1	0
100	-	-	-
101	-	0	-
110	0	1	1
111	-	0	-

Доопределим функцию f, используя определение монотонной функции.

Т.к. $f(1,1,0) = 0$, то на всех наборах, предшествующих набору $(1,1,0)$, функция f тоже должна равняться 0, т.е. $f(0,0,0) = f(1,0,0) = 0$.

Т.к. $f(0,0,1) = 1$, то на всех наборах, которым предшествует набор $(0,0,1)$, функция f должна принять значение 1, т.е. $f(1,0,1) = f(1,1,1) = 1$. Получаем: $f(x, y, z) = (01010101)$.

Доопределим функцию g, учитывая, что она - линейная. Общий вид линейной функции от переменных x, y, z имеет вид: $g(x, y, z) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z$.

Будем подставлять наборы значений аргументов, на которых функция определена.

Получим систему соотношений: $$\begin{cases} 1 = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 \\ 0 = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 1 \\ 1 = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 0 \\ 0 = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 \end{cases}$$

или $$\begin{cases} a_0 + a_2 + a_3 = 1 \\ a_0 + a_1 + a_3 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 1 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases}.$$

Заменяя $a_0 + a_1 + a_2$ на 1 в 4 уравнении системы, имеем:

$1 + a_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_3 = 1.$

Сложив первые три уравнения и учитывая, что $x + x = 0,$ получим: $a_0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 1.$

Подставляя в 1 уравнение найденные значения a_0 и $a_3,$ получим: $0 + a_2 + 1 = 1$ или $a_2 + 1 = 1,$ откуда $a_2 = 0.$

Подставив значения a_0 и a_3 во 2 уравнение, получим: $0 + a_1 + 1 = 0$ или $a_1 + 1 = 0,$ откуда $a_1 = 1.$

Итак, $g(x, y, z) = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = x + z.$

Исходя из этой формулы, найдём значения функции g на тех наборах, на которых она была не определена: $g(0,0,0) = 0 + 0 = 0;$ $g(0,0,1) = 0 + 1 = 1;$ $g(0,1,0) = 0 + 0 = 0;$ $g(1,0,0) = 1 + 0 = 1.$

В итоге имеем: $g(x, y, z) = (0101\,1010).$

Доопределим функцию $h,$ используя определение самодвойственной функции. Т.к. наборы (0,0,0) и (1,1,1) противоположны и $h(0,0,0) = 1 \Rightarrow h(1,1,1) = 0.$

Противоположными парами наборов значений переменных являются также (0,0,1) и (1,1,0), (0,1,0) и (1,0,1), (0,1,1) и (1,0,0). Используя известные значения функции $h,$ получим:

$h(0,0,1) = \overline{h(1,1,0)} = \bar{1} = 0,\ h(1,0,1) = \overline{h(0,1,0)} = \bar{1} = 0.$

Итак, $h(x, y, z) = (1010\,1010).$

Т.к. $f(0,0,0) = g(0,0,0) = 0 \neq h(0,0,0),$ то $f \in T_0,$ $g \in T_0,$ $h \notin T_0.$

Т.к. $g(1,1,1) = h(1,1,1) = 0,$ $f(1,1,1) = 1,$ то $f \in T_1,$ $g \notin T_1,$ $h \notin T_1.$

Задание 2.4.2

1. Можно ли из функции $f(x,y,z)$ с помощью суперпозиций получить $g(x,y,z)$?

2. Верно ли, что $f(x,y,z) \in [g]$? ($[g]$ - замыкание класса $\{g\}$)

Таблица 2.4.2

№	f	g	№	f	g
1	1001 0110	1110 0110	**16**	1010 0100	1000 1110
2	1001 0100	1101 0100	**17**	0101 1110	1011 0000
3	0111 1010	1000 0110	**18**	1101 0000	1101 0100
4	1101 1010	1010 1010	**19**	1100 0001	1101 1000
5	0110 1111	1010 0110	**20**	1001 1000	1110 1000
6	1000 0110	1001 1000	**21**	1011 0010	1100 0110
7	0110 1110	1001 0010	**22**	1000 1100	0011 1010
8	1000 0110	1101 1001	**23**	1001 0110	1111 0010
9	1100 0111	1001 1110	**24**	1100 1110	1000 0001
10	1010 0110	1001 0110	**25**	1100 0011	1001 1000
11	1110 1000	1100 1000	**26**	1001 0110	1101 1100
12	1000 0000	1100 0011	**27**	0111 1010	1001 1010
13	0111 1110	1101 0000	**28**	1101 0000	1110 1000
14	1110 0000	1011 0010	**29**	1111 0111	1010 1000
15	1110 1111	1100 0010	**30**	1000 1000	1001 0110

Пример решения задания 2.4.2

Решим задание 2.4.2 для функций $f = (1001\ \ 0100)$, $g = (1001\ \ 0110)$.

Проверим $f(x,y,z)$ на принадлежность к классам Поста.

$f(0,0,0) = 1 \quad \Rightarrow \quad f \notin T_0$; $f(1,1,1) = 1 \quad \Rightarrow \quad f \notin T_1$;

$(0,0,0) \preccurlyeq (0,0,1)$ и $f(0,0,0) > f(0,0,1) \quad \Rightarrow \quad f \notin M$;

$(0,0,1)$ и $(1,1,0)$ - противоположные наборы,

$f(0,0,1) = f(1,1,0) \Rightarrow f \notin S$;

$$f(x,y,z) = (x+1)(y+1)(z+1) + (x+1)yz + x(y+1)z =$$

$$= 1 + x + y + z + xy + xz + yz + xyz + xyz + yz + xyz + xz =$$

$$= 1 + x + y + z + xy + xyz.$$

Так как в полиноме функции f присутствуют конъюнкции, то $f \notin L$.

Итак, мы видим, что функция $f(x,y,z)$ не принадлежит ни одному из классов Поста, значит, система $\{f\}$ функционально полна, и с помощью суперпозиций из f можно получить любую булеву функцию, в частности, $g(x,y,z)$.

Проверяя значения функции $g(x,y,z)$ на всех парах противоположных наборов, видим:

$g(0,0,0)=1=\overline{g(1,1,1)}$, $g(0,0,1)=0=\overline{g(1,1,0)}$, $g(0,1,0)=1=\overline{g(1,0,1)}$,

$g(0,1,1)=1=\overline{g(1,0,0)}$. Значит, $g \in S$.

Так как S - функционально замкнутый класс, то $[g] \subseteq S$, но $f \notin S$, значит, $f \notin [g]$.

Задание 2.4.3

Для функций $f(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$ выяснить вопрос об их принадлежности к классам T_0, T_1, L, S, M.

В случае, если некоторая функция представляет из себя функционально полный класс, выразить из неё с помощью суперпозиций константы $0,1$, отрицание и конъюнкцию xy.

В случае, если некоторая функция представляет из себя функционально полный в слабом смысле класс, выразить из неё с помощью суперпозиций и фиксирования переменных отрицание и конъюнкцию xy.

Полученные результаты проверить с помощью построения таблиц.

Таблица 2.4.3

№	f	g	№	f	g
1	1100 0111	1101 1000	**6**	1000 0010	0000 1101
2	1110 1010	00110101	**7**	1011 1101	1100 0100
3	0100 1101	1100 1110	**8**	1111 1010	0101 1111
4	1111 0100	1001 0110	**9**	1000 0001	1110 1010
5	0110 1001	1101 0100	**10**	1101 1100	0001 1010

Таблица 2.4.3(окончание)

№	f	g	№	f	g
11	0010 0000	1100 1000	**21**	1011 0011	1100 0110
12	1001 0000	1000 0011	**22**	1000 1100	0011 1010
13	0111 1110	1101 0000	**23**	0001 0110	1111 0010

14	1110 0000	1011 0011	**24**	1100 1110	1000 0001
15	1110 1111	1100 0010	**25**	1100 0011	1101 1100
16	0010 0100	1000 1110	**26**	1001 1110	0101 0100
17	1101 1110	1011 0011	**27**	0111 1010	1011 1010
18	1101 0000	1101 0100	**28**	1101 0000	1110 1001
19	1100 0001	1101 1110	**29**	1111 0111	1011 1100
20	1001 1000	1110 1000	**30**	1000 1100	1001 0111

Пример решения задания 2.4.3

Решим задание 2.4.3 для функций $f=(0010\ \ 1000)$, $g=(1001\ \ 0010)$.

Выпишем развёрнутую таблицу функций f и g (таблица 2.4.3.а):

Таблица 2.4.3а

xyz	f	g
000	0	1
001	0	0
010	1	0
011	0	1
100	1	0
101	0	0
110	0	1
111	0	0

1. Исследуем функцию $f(x,y,z)$. Проверим $f(x,y,z)$ на принадлежность к классам Поста.

$f(0,0,0)=0 \quad \Rightarrow \quad f\in T_0$.

Заметим, что отсюда следует, что $\{f\}$ не является функционально полным классом.

$f(1,1,1)=0 \quad \Rightarrow \quad f\notin T_1$.

Так как наборы (0,0,0) и (1,1,1) противоположны и $f(0,0,0)=f(1,1,1)$, то $f\notin S$.

Имеем, что $(0,1,0)\preccurlyeq(0,1,1)$, но $f(0,1,0)>f(0,1,1)$, значит, $f\notin M$.

Найдём полином для $f(x,y,z)$:

$$f(x,y,z)=\sum_{\substack{(0,1,0)\\(1,0,0)}}(x+\overline{a})(y+\overline{b})(z+\overline{c})=(x+1)y(z+1)+x(y+1)(z+1)=$$

$$=xyz+xy+yz+y+xyz+xy+xz+x=xz+yz+x+y.$$

Так как полином функции f содержит конъюнкцию, то $f\notin L$.

Как было отмечено ранее, $\{f\}$ не является функционально полным классом, но, так как функция f нелинейна и немонотонна, $\{f\}$ – функционально полный в слабом смысле класс.

Выразим из f отрицание с помощью фиксирования переменных. На соседних наборах (0,1,0) и (0,1,1) нарушается монотонность, рассмотрим функцию $p(x) = f(0,1,x)$.

Найдём все значения функции $p(x)$:

$$p(0) = f(0,1,0) = 1, \quad p(1) = f(0,1,1) = 0 \quad \Rightarrow \quad p(x) = \bar{x}.$$

Отрицание построено, $\bar{x} = f(0,1,x)$.

Для построения конъюнкции зафиксируем одну переменную и переобозначим оставшиеся переменные так, чтобы полином принял вид

$xy + \alpha x + \beta y + \gamma$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \{0,1\}$.

Например, можно сделать так: $f(1, y, x) = 1 \cdot x + xy + 1 + y =$

$= xy + x + y + 1$. В этом случае $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

Введём функцию $h(x, y) = f(1, y + \alpha, x + \beta) + \alpha\beta + \gamma = f(1, \bar{y}, \bar{x}) =$

$= f(1, f(0,1, y), f(0,1, x))$.

Найдём значения функции h на всех её наборах.

$h(0,0) = f(1, f(0,1,0), f(0,1,0)) = f(1,1,1) = 0;$

$h(0,1) = f(1, f(0,1,1), f(0,1,0)) = f(1,0,1) = 0;$

$h(1,0) = f(1, f(0,1,0), f(0,1,1)) = f(1,1,0) = 0;$

$h(1,1) = f(1, f(0,1,1), f(0,1,1)) = f(1,0,0) = 1.$

Как видим, таблица функции $h(x, y)$ совпадает с таблицей конъюнкции, следовательно, $x \cdot y = f(1, f(0,1, y), f(0,1, x))$.

2. Исследуем $g(x, y, z)$ на принадлежность к классам Поста.

$g(0,0,0) = 1 \quad \Rightarrow \quad g \notin T_0.$

$g(1,1,1) = 0 \quad \Rightarrow \quad g \notin T_1.$

Наборы (1,0,1) и (0,1,0) противоположны и $g(1,0,1) = g(0,1,0) \quad \Rightarrow \quad g \notin S.$

Так как $(0,0,0) \preccurlyeq (0,0,1)$, но $g(0,0,0) = g(0,0,1) \quad \Rightarrow \quad g \notin M.$

Найдём полином для $g(x, y, z)$:

$$g(x, y, z) = (x+1)(y+1)(x+1) + (x+1)yz + xy(z+1) =$$

$$= xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1 + xyz + yz + xyz + xy =$$

$$= 1 + x + y + z + xz + xyz.$$

Так как в полиноме функции g содержится конъюнкция, то $g \notin L.$

Итак, функция g не принадлежит ни одному из пяти классов поста, значит, $\{g\}$ – функционально полный класс.

Выразим из g отрицание с помощью одних лишь суперпозиций. Рассмотрим функцию $s(x) = g(x, x, x).$

Найдём все значения функции $s(x)$:

$$s(0) = g(0,0,0) = 1, \quad s(1) = g(1,1,1) = 0 \quad \Rightarrow \quad s(x) = \overline{x}.$$

Отрицание построено, $\overline{x} = g(x, x, x)$.

Строим константу 0. Для этого возьмём набор из пары противоположных наборов, на которых функция g равна 0, например, (1,0,1) и рассмотрим функцию $o(x)$:

$$o(x) = g(x^1, x^0, x^1) = g(x, \overline{x}, x) = g(x, g(x, x, x), x).$$

Найдём значения функции $o(x)$ на её наборах.

$$o(0) = g(0, g(0,0,0), 0) = g(0,1,0) = 0;$$

$$o(1) = g(1, g(1,1,1), 1) = g(1,0,1) = 0.$$

Константа 0 построена, $g(x, g(x, x, x), x) \equiv 0.$

Для построения константы 1 возьмём отрицание от функции $o(x)$ и обозначим полученную функцию через $e(x)$.

$$e(x) = g(o(x), o(x), o(x)) =$$

$$= g(g(x, g(x, x, x,), x), g(x, g(x, x, x,), x), g(x, g(x, x, x,), x)).$$

Итак, константа 1 получена,

$$g(g(x,g(x,x,x,),x),g(x,g(x,x,x,),x),g(x,g(x,x,x,),x))\equiv 1.$$

Для построения конъюнкции зафиксируем переменную z, придав ей значение 1.

Получим: $g(x,y,1)=1+x+y+1+x\cdot 1+xy\cdot 1=xy+y+1,$ то есть мы получили выражение вида $xy+\alpha x+\beta y+\gamma$, где $\alpha=\gamma=0$, $\beta=1$.

Рассмотрим функцию $k(x,y)=g(x+\beta,y+\alpha,1)+\alpha\beta+\gamma=$

$=g(x+1,y,1)+0\cdot 1+0=g(g(x,x,x),y,1)=$

$=g(g(x,x,x),y,g(g(x,g(x,x,x),x),g(x,g(x,x,x),x),g(x,g(x,x,x),x))).$

Найдём значения функции k на всех её наборах.

$k(0,0)=g(g(0,0,0),0,g(g(0,g(0,0,0),0),g(0,g(0,0,0),0),g(0,g(0,0,0),0)))=$
$=g(1,0,g(g(0,1,0),g(0,1,0),g(0,1,0))=g(1,0,0)=0;$

$k(0,1)=g(g(0,0,0),1,g(g(0,g(0,0,0),0),g(0,g(0,0,0),0),g(0,g(0,0,0),0)))=$
$=g(1,1,g(g(0,1,0),g(0,1,0),g(0,1,0)))=g(1,1,g(0,0,0)=g(1,1,1)=0;$

$k(1,0)=g(g(1,1,1),0,g(g(1,g(1,1,1),1),g(1,g(1,1,1),1),g(1,g(1,1,1),1)))=$
$=g(0,0,g(g(1,0,1),g(1,0,1),g(1,0,1)))=g(0,0,g(0,0,0)=g(0,0,1)=0;$

$k(1,1)=g(g(1,1,1),1,g(g(1,g(1,1,1),1),g(1,g(1,1,1),1),g(1,g(1,1,1),1)))=$
$=g(0,1,g(g(1,0,1),g(1,0,1),g(1,0,1)))=g(0,1,g(0,0,0)=g(0,1,1)=1.$

Как видим, таблица функции $k(x,y)$ совпадает с таблицей конъюнкции, следовательно,

$$x\cdot y=g(g(x,x,x),y,g(g(x,g(x,x,x),x),g(x,g(x,x,x),x),g(x,g(x,x,x),x))).$$

Задание 2.4.4

Подсчитать число различных булевых функций от n переменных, принадлежащих данному множеству A.

Таблица 2.4.4

№	A	№	A	№	A
1	$(L \cup T_0) \setminus T_1$	**11**	$S \Delta L$	**21**	$(S \cap T_1) \cup L$
2	$(S \cup T_0) \setminus T_1$	**12**	$(S \cap L) \cup T_0$	**22**	$(T_1 \cup T_0) \cap L$
3	$S \cup T_0 \cup T_1$	**13**	$(S \cap L) \cup T_1$	**23**	$(T_1 \cap T_0) \cup L$
4	$(S \cup T_0) \cap T_1$	**14**	$(S \cup L) \cap T_1$	**24**	$(L \cap T_0) \cup (S \cap T_1)$
5	$S \Delta T_1$	**15**	$(S \cup L) \cap T_0$	**25**	$(S \cap T_1) \setminus (L \cap T_0)$
6	$(L \cup T_1) \setminus T_0$	**16**	$(L \cup T_0) \cap S$	**26**	$(T_1 \cup T_0) \setminus S$
7	$L \Delta T_1$	**17**	$(L \cap T_0) \cup S$	**27**	$(T_1 \cup T_0) \setminus L$
8	$(S \cap T_0) \cup T_1$	**18**	$(L \cup T_1) \cap S$	**28**	$(L \cup T_0) \setminus S$
9	$(S \cap T_1) \cup T_0$	**19**	$(L \cap T_1) \cup S$	**29**	$T_0 \setminus (S \cup L)$
10	$(S \cup L) \setminus T_0$	**20**	$(S \cup T_0) \cap L$	**30**	$(T_0 \setminus S) \setminus T_1$

Примеры решения задания 2.4.4

Пример 1. Подсчитать число различных булевых функций от n переменных, принадлежащих множеству $L \setminus (T_0 \cap S)$.

Обозначим через $L^{(n)}$, $T_0^{(n)}$ и $S^{(n)}$ соответственно множества линейных, сохраняющих ноль и самодвойственных функций от n переменных. Изобразим множества $L^{(n)}$, $T_0^{(n)}$ и $S^{(n)}$ схематично (рис.2.4.4):

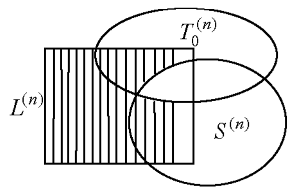


Рис.2.4.4а

Заштрихованная область соответствует функциям искомого класса. Очевидно, выполнено равенство:

$|L^{(n)} \setminus (T_0^{(n)} \cap S^{(n)})| = |L^{(n)}| - |L^{(n)} \cap T_0^{(n)} \cap S^{(n)}|$.

Каждая функция из $L^{(n)}$ имеет вид: $a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$.

Поставим в соответствие каждой такой функции вектор её двоичных коэффициентов $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Очевидно, что это соответствие - биекция, значит, количество различных линейных функций от n переменных, равно количеству различных двоичных наборов размерности $n+1$, т.е. 2^{n+1}, итак, $|L(n)| = 2^{n+1}$.

Если линейная функция сохраняет константу 0, то

$a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 0,$ и она имеет вид

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$. Для самодвойственной функции выполняется свойство $f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) = \overline{f(x_1, \ldots, x_n)}$. Учитывая, что $\overline{x} = x + 1,$ посмотрим, как будет выглядеть это равенство в случае линейной, сохраняющей ноль функции:

$$a_1(x_1 + 1) + a_2(x_2 + 1) + \ldots + a_n(x_n + 1) = 1 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n.$$

Раскроем скобки:

$$a_1 x_1 + a_1 + a_2 x_2 + a_2 + \ldots + a_n x_n + a_n = 1 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n.$$

Прибавим по модулю 2 к обеим частям полученного равенства выражение $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$, учтём, что $x + x = 0.$ Тогда после упрощений будем иметь: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1 \qquad (*)$

Из коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ произвольным образом можно назначать $n - 1$ коэффициент, а значение n- го коэффициента однозначно определяется из равенства $(*)$. Итак, между множеством булевых функций класса $L^{(n)} \cap T_0^{(n)} \cap S^{(n)}$ и множеством двоичных векторов размерности $n - 1$ существует биекция, значит, верно равенство $| L^{(n)} \cap T_0^{(n)} \cap S^{(n)} | = 2^{n-1}$.

В итоге получаем:

$$| L^{(n)} \setminus (T_0^{(n)} \cap S^{(n)}) | = | L^{(n)} | - | L^{(n)} \cap T_0^{(n)} \cap S^{(n)} | = 2^{n+1} - 2^{n-1} =$$

$$= 2^{n-1}(4 - 1) = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

Пример 2. Подсчитать число различных булевых функций от n переменных, принадлежащих множеству $S \cup T_1$.

Обозначим через $S^{(n)}$ и $T_1^{(n)}$ соответственно множества самодвойственных и сохраняющих единицу функций от n переменных.

Изобразим множества $S^{(n)}$ и $T_1^{(n)}$ (рис.2.4.4.б):

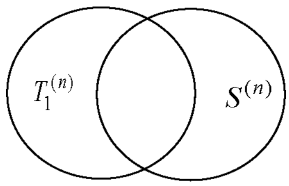


Рис.2.4.4б

Очевидно, $|S^{(n)} \cup T_1^{(n)}| = |S^{(n)}| + |T_1^{(n)}| - |S^{(n)} \cap T_1^{(n)}|$.

Пусть $f \in S^{(n)}$, $g \in T_1^{(n)}$, $h \in S^{(n)} \cap T_1^{(n)}$, изобразим таблицы этих функций:

Таблица 2.4.4а

x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n	f	g	h
0	0	...	0	0	a_1	b_1	0
0	0	...	0	1	a_2	b_2	c_1
...	...	...	...	...	...	...	...
0	1	...	1	1	$a_{2^{n-1}}$	...	$c_{2^{n-1}-1}$
1	0	...	0	0	$\neg a_{2^{n-1}}$	...	$\neg c_{2^{n-1}-1}$
...	...	...	...	...	...	...	...
1	1	...	1	0	$\neg a_2$	b_{2^n-1}	$\neg c_1$
1	1	...	1	1	$\neg a_1$	1	1

Значит, мощности множеств $S^{(n)}$, $T_1^{(n)}$ и $S^{(n)} \cap T_1^{(n)}$ равны соответственно $2^{2^{n-1}}$, 2^{2^n-1} и $2^{2^{n-1}-1}$.

В итоге: $|S^{(n)} \cup T_1^{(n)}| = 2^{2^{n-1}} + 2^{2^n-1} - 2^{2^{n-1}-1} = 2^{2^{n-1}-1} + 2^{2^n-1}$.

2.5. Минимизация нормальных форм всюду определённых булевых функций

Элементарная конъюнкция E называется *импликантой* булевой функции f, если $E \to f \equiv 1$.

Импликанта E называется *простой,* если при удалении любой буквы из неё она перестаёт быть импликантой булевой функции f.

Сокращённой ДНФ называется ДНФ, состоящая из всех простых импликант данной булевой функции

Ядровая импликанта - импликанта, удаление которой из ДНФ некоторой булевой функции f приводит к ДНФ, не равносильной f.

Минимальная ДНФ данной функции f - ДНФ, имеющая наименьшее число символов переменных из всех ДНФ, задающих функцию f.

Тупиковой ДНФ функции f называется такая её ДНФ, состоящая из простых импликант, что удаление из неё любой конъюнкции нарушает равносильность ДНФ данной функции.

Сложностью ДНФ (КНФ) называется количество символов переменных, использованных в записи формулы.

Сокращённая ДНФ может быть получена из СДНФ последовательным применением, пока это возможно, формулы *неполного склеивания* $Ku \vee K\overline{u} = Ku \vee K\overline{u} \vee K$, а затем - формулы *поглощения* $Ku \vee K = K$.

Задание 2.5.1

Для данной функции $f(x, y, z, w)$, заданной векторно, проделать следующее :

1. Записать её СДНФ и СКНФ.
2. Методом Квайна найти сокращённую ДНФ.

3. Для сокращённой ДНФ построить матрицу Квайна, указать ядровые импликанты.

4. С помощью матрицы Квайна найти минимальную ДНФ, указать её сложность.

5. Найти минимальную ДНФ данной функции с помощью карт Карнау, сравнить полученный результат с ДНФ, найденной в п.4.

Таблица 2.5.1

№	f	№	f	№	f
1	1111 0101 0011 1101	**11**	0100 1110 1101 1111	**21**	1011 1111 0001 1111
2	1101 1110 1010 1110	**12**	1111 1110 0111 1100	**22**	1110 1100 1111 1001
3	0111 0001 1111 1101	**13**	1000 1011 1111 1111	**23**	1001 1011 1111 1010
4	1011 1111 1111 1000	**14**	1111 1101 1110 0001	**24**	1111 1110 0111 0011
5	1101 0101 1101 1111	**15**	1101 0111 1100 1110	**25**	1010 1111 0111 0011
6	1111 1110 1010 0011	**16**	1011 1111 1010 1101	**26**	1110 0110 1111 1100
7	1111 0010 0111 1110	**17**	1001 1101 1010 1111	**27**	0111 0111 0101 1011
8	1100 1110 1111 1011	**18**	1110 0110 1111 1100	**28**	1101 1111 1110 1010
9	1100 0110 1111 0111	**19**	0011 1011 1010 1111	**29**	1111 0011 0111 0111
10	1011 1111 1110 0010	**20**	1111 0110 1110 1110	**30**	1110 1110 1010 1101

Пример решения задания 2.5.1.

Решим задание 2.5.1. для функции $f(x,y,z,w)=(1101\ 1010\ 1101\ 1100)$.

1. Изобразим таблицу функции f в виде двумерной таблицы - карты Карнау (табл.2.5.1а):

Таблица 2.5.1а

$xy \backslash zw$	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	1	0	0	1
11	1	1	0	0
10	1	1	1	0

Найдём СДНФ данной функции:

$$f(x,y,z,w)=\bigvee_{\substack{(a,b,c,d)\\ f(a,b,c,d)=1}} x^a\cdot y^b\cdot z^c\cdot w^d=$$

$$=x^0y^0z^0w^0\vee x^0y^0z^0w^1\vee x^0y^0z^1w^1\vee x^0y^1z^0w^0\vee x^0y^1z^1w^0\vee$$

$$\vee x^1y^0z^0w^0\vee x^1y^0z^0w^1\vee x^1y^0z^1w^1\vee x^1y^1z^0w^0\vee x^1y^1z^0w^1=$$

$$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w}\vee\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}w\vee\overline{x}\,\overline{y}zw\vee\overline{x}y\overline{z}\,\overline{w}\vee\overline{x}yz\overline{w}\vee x\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w}\vee x\overline{y}\,\overline{z}w\vee$$

$$\vee x\overline{y}zw\vee xy\overline{z}\,\overline{w}\vee xy\overline{z}w.$$

Найдём СКНФ данной функции:

$$f(x,y,z,w)=\bigwedge_{\substack{(a,b,c,d)\\ f(a,b,c,d)=0}}(x^{\overline{a}}\vee y^{\overline{b}}\vee z^{\overline{c}}\vee w^{\overline{d}})=(x^1\vee y^1\vee z^0\vee w^1)\wedge$$

$$\wedge(x^1\vee y^0\vee z^1\vee w^0)\wedge(x^1\vee y^0\vee z^0\vee w^0)\wedge(x^0\vee y^1\vee z^0\vee w^1)\wedge$$

$$\wedge(x^0\vee y^0\vee z^0\vee w^1)\wedge(x^0\vee y^0\vee z^0\vee w^0)=$$

$$=(x\vee y\vee\overline{z}\vee w)\wedge(x\vee\overline{y}\vee z\vee\overline{w})\wedge(x\vee\overline{y}\vee\overline{z}\vee\overline{w})\wedge(\overline{x}\vee y\vee\overline{z}\vee w)\wedge$$

$$=(\overline{x}\vee\overline{y}\vee\overline{z}\vee w)\wedge(\overline{x}\vee\overline{y}\vee\overline{z}\vee\overline{w}).$$

2. Построим сокращённую ДНФ из СДНФ, используя формулы неполного склеивания и поглощения. Для удобства, вместо символов переменных будем работать только с показателями степеней переменных.

Например, вместо $x\overline{z}$ будем употреблять набор 0 - 1 - . Тогда СДНФ функции будет соответствовать множество всех её единичных наборов. Выпишем единичные наборы данной булевой функции в таблицу, разбив их на группы в соответствии с количеством единичных компонент в наборах.

Тогда для применения формулы неполного склеивания достаточно просмотреть всевозможные пары наборов, входящих в соседние группы. Результаты склеивания наборов из I полосы поместим во II полосе, а наборы, участвующие в склеиваниях, пометим крестиком. Во второй полосе снова применяем, насколько возможно, операцию склеивания, записывая результаты в III полосу и т.д. После завершения процедуры склеивания все простые импликанты попадут в таблицу и не будут помечены крестиком. Помеченные же конъюнкции поглотятся на этапе применения формулы поглощения.

Таблица 2.5.1b

0 0 0 0 +	0 0 0 - +	
0 0 0 1 +	0 - 0 0 +	- 0 0 -
0 1 0 0 +	- 0 0 0 +	- - 0 0
1 0 0 0 +	0 0 - 1 +	- 0 - 1
0 0 1 1 +	0 1 - 0	1 - 0 -
0 1 1 0 +	- 0 0 1 +	
1 0 0 1 +	1 0 0 - +	
1 1 0 0 +	- 1 0 0 +	
1 0 1 1 +	1 - 0 0 +	
1 1 0 1 +	- 0 1 1 +	
	1 0 - 1 +	
	1 - 0 1 +	
	1 1 0 - +	
I полоса	II полоса	III полоса

Сокращённая ДНФ данной булевой функции имеет вид: $\bar{x}y\bar{w} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{z}\bar{w} \vee \bar{y}w \vee \bar{x}z$.

3. Для получения из сокращённой ДНФ минимальной ДНФ изобразим следующую таблицу - матрицу Квайна (табл.2.5.1c).

Ядровыми импликантами будут 1, 4 и 5, так как для каждой из них найдётся единичный набор, на котором она одна принимает значение 1.

4. Выбираем наименьшее число столбцов таких, чтобы для каждой строки из данной таблицы и хотя бы одной единицы в этой строке нашёлся бы по крайней мере один столбец из множества выбранных столбцов, который содержит эту единицу. Тогда дизъюнкция членов, сопоставленных всем выбранным столбцам, является минимальной ДНФ.

Для выбора наименьшего числа столбцов, удовлетворяющих перечисленным выше требованиям, составляем символическое выражение $(2\vee3)\cdot(2\vee4)\cdot4\cdot(1\vee3)\cdot1\cdot(2\vee3\vee5)\cdot(2\vee4\vee5)\cdot4\cdot(5\vee3)\cdot5$

Таблица 2.5.1c

№ простой импликанты	1	2	3	4	5
простые импликанты / единичные наборы	$\bar{x}y\bar{w}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{y}w$	$x\bar{z}$
0000		1	1		
0001		1		1	
0011				1	
0100	1		1		
0110	1				
1000		1	1		1
1001		1		1	1
1011				1	
1100			1		1
1101					1

Приведём это символическое выражение к ДНФ, используя дистрибутивный закон и формулу поглощения $(A \vee B)\cdot A = A$. Получим: $(2\vee3)\cdot4\cdot1\cdot5 = 2\cdot4\cdot1\cdot5\vee3\cdot4\cdot1\cdot5$. Сопоставим каждой символической конъюнкции тупиковую ДНФ и выберем из них кратчайшую.

В нашем примере символической конъюнкции $2\cdot4\cdot1\cdot5$ соответствует ДНФ $\bar{x}y\bar{w} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{y}w \vee x\bar{z}$, а символической конъюнкции $3\cdot4\cdot1\cdot5$ – $\bar{x}y\bar{w} \vee \bar{z}\bar{w} \vee \bar{y}w \vee x\bar{z}$. Каждая из полученных ДНФ является минимальной для данной булевой функции и имеет сложность, равную количеству символов переменных в формуле, т.е. сложность 9.

Таблица 2.5.1d

xy \ zw	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	1	0	0	1
11	1	1	0	0
10	1	1	1	0

5. Найдём минимальную ДНФ с помощью карты Карнау:

Задача нахождения минимальной ДНФ с помощью карты Карнау сводится к задаче покрытия всех единиц карты Карнау прямоугольниками возможно больших размеров, причём разрешается использовать только прямоугольники, площади которых являются натуральными степенями двойки. При построении покрытия не забываем, что карта Карнау как бы наклеена на поверхность тора, т.е. её левая и правая, а также верхняя и нижняя границы отождествляются. В нашем примере все единицы покрываются четырьмя прямоугольниками: прямоугольник 1×2, соответствующий конъюнкции $\bar{x}y\bar{w}$, прямоугольник 1×4, соответствующий конъюнкции $\bar{z}\bar{w}$ и два квадрата, соответствующих импликантам $x\bar{z}$ и $\bar{y}w$. Значит, минимальная ДНФ, соответствующая этому покрытию, равна $\bar{x}y\bar{w} \vee \bar{z}\bar{w} \vee \bar{y}w \vee x\bar{z}$.

Задание 2.5.2

Для функций $f(x,y,z)$, $g(x,y,z,w)$, $h(x,y,z,w,t)$ найти минимальные ДНФ и минимальные КНФ с помощью карт Карнау, указать сложности минимальных ДНФ.

Таблица 2.5.2

№	f	g	h
1	1011 1100	1110 1110 1111 0001	1011 1110 1100 1111 1111 0001 0101 1100
2	0111 1010	1111 0010 1111 0111	1100 1011 1011 1110 1110 1011 0111 1111
3	1001 1001	1101 1001 1111 0011	1011 1111 0011 0001 0110 1101 1011 1110
4	1110 1110	1011 1010 1111 1110	1100 1100 1110 1111 1000 1111 1011 1111
5	1010 1111	1101 1100 1111 1101	1101 0011 1111 1101 1110 1101 0111 1100
6	0110 1111	1111 1011 0011 1101	1011 1100 1111 1000 0111 1011 1110 0101
7	1000 1101	1010 1111 1011 1110	1100 1110 0111 1111 0001 1111 1011 0111
8	0111 0110	1100 1110 1100 1111	1010 1110 1111 1101 0111 1001 1110 0000

Таблица 2.5.2(продолжение)

№	*f*	*g*	*h*
9	1110 0011	1101 1011 1111 1101	1001 1100 1101 1111 1101 1111 0001 1011
10	0111 0101	1010 1110 1110 1111	1010 1110 0111 1110 0011 1110 0110 0101
11	1000 1111	1001 0001 1110 1110	0101 1110 1110 0111 0111 1110 1101 0110
12	1011 0111	1101 1011 1110 1110	1010 0111 1101 1111 1000 1111 1110 1001
13	0011 1101	0111 1011 0011 1110	1001 1100 1110 1111 1100 1111 1010 0000
14	1011 0111	1000 0110 1111 1110	0110 1101 1111 1101 1111 1011 0111 1110
15	0111 0101	1011 1101 0011 0111	1010 1111 1011 1101 0111 1110 1101 1110
16	0111 1110	1100 1100 0111 1100	1101 0111 1101 1011 0111 1110 1111 0000
17	1111 0110	0011 0111 1111 1011	0101 1000 1111 1100 1000 1110 1110 0111
18	0111 1001	1100 1100 1110 0011	0100 1111 1101 0111 1111 0101 1110 1101
19	1000 1110	0111 1110 0011 1110	0001 1111 1011 1101 0010 1111 1000 1000
20	0111 1001	1010 1110 1111 1101	1011 0001 1111 1100 0111 1001 1110 1110
21	0101 1100	1111 0011 1011 1111	1001 1011 1100 1110 0001 0111 1011 1000
22	0111 0101	1100 0000 1110 1101	1011 1111 1101 0111 1110 1110 0111 0001
23	1001 0110	1101 1110 1101 1111	0111 1110 1110 0011 1111 0011 1001 1111

Таблица 2.5.2(окончание)

№	f	g	h
24	0001 1100	1100 1110 0111 1111	1010 1111 1101 1100 1111 1010 1101 0110
25	1000 1110	1010 0111 1110 1100	0111 0111 1010 0011 1111 0010 1010 1111
26	1110 0101	1101 1001 1111 0111	0110 1111 1110 1010 0110 0110 1101 0010
27	1101 1100	0011 0011 1011 1111	1001 1110 1001 1111 0010 1001 1111 0011
28	1110 0110	1010 0101 1111 1011	0111 1011 1011 1111 1111 1011 0010 1111
29	0001 1111	1101 0111 1110 0110	1101 0100 1111 0111 1110 0110 1111 1000
30	1100 0011	0110 1101 1111 1000	0111 1010 1110 0111 1110 0111 1110 0110

Пример решения задания 2.5.2.

Решим задание 2.5.2. для функций $f(x,y,z)=(0111\ 0011)$, $g(x,y,z,w)=(1111\ 1101\ 1010\ 0000)$,
$h(x,y,z,w,t)=(1111\ 0111\ 1010\ 0110\ 1111\ 0111\ 1010\ 1010)$.

Карту Карнау для функции $f(x,y,z)$ от трёх переменных имеет такой вид (табл. 2.5.2а):

Таблица 2.5.2а

z / xy	0	1
00	0	1
01	1	1
11	1	1
10	0	0

Мы считаем её как бы наклеенной на поверхность цилиндра, т.е. отождествляем верхнюю часть карты Карнау с нижней. При отыскании минимальной ДНФ единицы карты Карнау покрываем прямоугольниками вида 2×2 и 1×2, отвечающим импликантам y и $\bar{x}z$ соответственно, получаем минимальную ДНФ $y\vee\bar{x}z$. Её сложность равна 3.

Для нахождения минимальной КНФ покрываем нули карты Карнау двумя прямоугольниками размерами 1×2, которые соответствуют элементарным дизъюнкциям $y \vee \bar{x}$ и $y \vee z$. В результате получаем минимальную КНФ $(y \vee \bar{x}) \cdot (y \vee z)$.

При нахождении минимальной ДНФ функции $g(x, y, z, w)$ заполняем карту Карнау и покрываем единицы карты прямоугольниками возможно больших размеров (табл.2.5.2.b):

Таблица 2.5.2b

zw \ xy	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

Получим минимальную ДНФ: $\bar{y}\bar{w} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}w$

Сложность минимальной ДНФ равна 6.

Таблица 2.5.2c

Отыщем минимальную КНФ функции $g(x, y, z, w)$. Для этого произведём покрытие нулей карты Карнау (табл.2.5.2c):

zw \ xy	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

Минимальная КНФ будет иметь вид: $(\bar{x} \vee \bar{y}) \cdot (\bar{x} \vee \bar{w}) \cdot (\bar{y} \vee \bar{z} \vee w)$.

Рассмотрим функцию

$h(x, y, z, w, t) = (1111\ 0111\ 1010\ 1111\ 0111\ 1010\ 1010)$.

Карту Карнау для пяти переменных можно воспринимать, как “двухслойную” карту Карнау для функции от 4 переменных, где верхний слой соответствует значениям $x = 0$, а нижний – $x = 1$, причём клетки, образующие “двухслойный” прямоугольник, соответствуют импликантам, в которых переменная x отсутствует. Двухслойные прямоугольники будем изображать жирными линиями, а однослойные – тонкими (табл. 2.5.2d).

Все единицы карты Карнау могут быть покрыты тремя двухслойными прямоугольниками и двумя однослойными. Минимальная ДНФ будет иметь вид: $\bar{z}\bar{t} \vee \bar{y}t \vee \bar{x}z\bar{w}t \vee xy\bar{t}$.

Её сложность равна 13.

Таблица 2.5.2d

wt \ xyz	00	01	11	10
000	1	1	1	1
001	0	1	1	1
011	0	1	0	1
010	1	0	0	1
100	1	1	1	1
101	0	1	1	1
111	1	0	0	1
110	1	0	0	1

Таблица 2.5.2e

wt \ xyz	00	01	11	10
000	1	1	1	1
001	0	1	1	1
011	0	1	0	1
010	1	0	0	1
100	1	1	1	1
101	0	1	1	1
111	1	0	0	1
110	1	0	0	1

Для отыскания минимальной КНФ покроем прямоугольниками нули карты Карнау (рис. 2.5.2e).

Все нули карты Карнау могут быть покрыты тремя двухслойными прямоугольниками и двумя однослойными.

Минимальная КНФ будет иметь вид:

$$(\bar{y} \vee \bar{w} \vee \bar{t}) \cdot (\bar{y} \vee z \vee \bar{t}) \cdot (y \vee \bar{z} \vee w \vee t) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{t}) \cdot (x \vee \bar{z} \vee w \vee t).$$

2.6. Частичные функции и схемы

Частичной функцией называется функция, определённая не на всех наборах своих переменных.

Простой импликантой частичной функции f называется элементарная конъюнкция K, для которой выполняются условия:

1) $\exists_\alpha K(\alpha) = 1,\ f(\alpha) = 1$;

2) $\forall_{\beta} f(\beta)=0 \to K(\beta)=0$;

3) если из импликанты K удалить любую букву, получится формула K' такая, что $\exists_{\gamma} K'(\gamma)=1,\ f(\gamma)=0$.

Доопределением частичной функции f будем называть всюду определённую функцию g, значения которой совпадают со значениями функции f на тех наборах, на которых функция f определена.

Критерий существования декомпозиции заданного вида:

Частичная функция f представляется в виде $f(u,v,w)=g(u,w,h(u,v))$ тогда и только тогда для каждого фиксированного набора α значений переменных из множества u таблица функции $f_{\alpha}(v,w)$ допускает доопределение до таблицы, содержащей столбцы не более двух различных типов.

Контактной схемой называется неориентированный граф, каждому ребру (*контакту*) которого приписан символ переменной в некоторой степени и выделены две вершины, которые называются *полюсами*.

Частная производная булевой функции $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ по переменной x_i определяется так:

$$f'_{x_i}=f(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n)+f(x_1,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n)\,.$$

Тестом относительно множества $G=\{g_i\}$ попарно различных булевых функций называется множество наборов значений переменных T такое, что $\forall_i \forall_{k\neq i} \exists_{e\in T}(g_i(e)\neq g_k(e))$

Задание 2.6.1

1. Реализовать частичную функцию $f(x,y,z,w)$ формулами над базисом конъюнкция, дизъюнкция, отрицание четырьмя способами:

а) методом Квайна; б) исходя из минимальной ДНФ, найденной с помощью карт Карнау; в) исходя из минимальной КНФ, найденной с помощью карт Карнау; г) методом последовательного разложения по переменным *xyzw.*

2. Для простейшего представления построить схему из функциональных элементов типа конъюнкция, дизъюнкция, отрицание.

3. Реализовать простейшее представление контактной схемой.

4. Проверить возможность разделительной декомпозиции функции $f(x,y,z,w)$ в виде $g(u,v,h(p,t))$, где u,v,p,t - некоторая перестановка переменных $xyzw$.

Если декомпозиция указанного вида возможна, реализовать её схемой с ветвлениями из функциональных элементов типа конъюнкция, дизъюнкция, отрицание. Указать сложность построенной схемы.

Таблица 2.6.1

№	$f(x,y,z,w)$	№	$f(x,y,z,w)$
1	- - 01 1 - 11 - 0 - - 0110	**16**	1 - - 0 1 - 11 - 0 - 0 110 -
2	1- - 1 0 - 0 - 010 - - 01 -	**17**	0 - - 0 1 - 1 - 1110 1 - 11
3	- 0 -1 - 001 - - 1 1 10 - 1	**18**	11 - - - 0 -1 - 010 0 - 10
4	11 - - 0 - 11 - 1 - 1 - 100	**19**	0 - 11 1 - -1 0 -1 - 00 - 1
5	- - 10 0 - 11 - - 01 - 101	**20**	1 - 10 - - - 0 11 - 0 011 -
6	1 - - 1 01 - - - 100 - 110	**21**	01 - 1 - 10 - 011 - - 01 -
7	0 - 11 0 -10 10 - - 1 - 1 -	**22**	- - 1 - 01 - 0 00 - 1 111 -
8	10 -1 -100 10 - - 10 - -	**23**	0 - 1 - - 1 - 0 0 - 11 - 001
9	- 10 - 101 - - 1 - 0 11 - 0	**24**	- 1 0 - - 0 11 1 - 10 - - 01
10	1- - 0 - 110 - 1 - 0 11 - 0	**25**	1 - - 0 1 - 1 - - 101 0 - 10
11	-1 - 0 - 011 1 - - 1 - 011	**26**	- 0 - 0 - 111 1 - 0 - 00 - 1
12	11 - - 01 - 0 - 01 - 011 -	**27**	11 - 0 0 - 10 - - 0 - 00 - 1
13	1 - - 1 01 - 1 - - 10 00 - 1	**28**	- - 0 1 1 - 11 - 0 - 0 - 001
14	- 010 - 1 - 0 01 -1 - 1 - 0	**29**	10 - - - 011 1 - - 0 11 - 1
15	0 - 0 - 11 - 1 - 110 1 - - 1	**30**	- 1 - 1 0 - 11 0 - 1 - 101 -

Пример решения задания 2.6.1

Решим задание 2.6.1. для функции $f(x,y,z,w) = $ (-101 01-- --0- 11-0).

Запишем таблицу функции f в виде карты Карнау (табл.2.6.1а):

Таблица 2.6.1a

xy \ zw	00	01	11	10
00	-	1	1	0
01	0	1	-	-
11	1	1	0	-
10	-	-	-	0

Для отыскания сокращённой ДНФ выпишем в список M_0 все нулевые наборы функции, а в M_1 - единичные набо-

Таблица 2.6.1b

M_0
0010
0100
1010
1111

M_1
0001
0011
0101
1100
1101

ры (табл. 2.6.1b).

Будем перебирать все единичные наборы из списка M_1, который запишем в виде первого столбца. Для каждого из единичных наборов будем заменять последовательно его символы на неопределённый символ “ - ” и смотреть, не будет ли совпадать с точностью до неопределённого символа полученная комбинация с каким-либо набором, вошедшим в список M_0. Если совпадение есть, переходим к следующему символу, если нет - помечаем набор “крестиком”, выписываем результат замены во второй столбец и переходим к следующему символу или к следующему набору.

Затем совершаем аналогичную процедуру над наборами из второго столбца и так далее. В результате наборы, не помеченные крестиком, будут соответствовать простым импликантам, из которых состоит сокращённая ДНФ (табл. 2.6.1с).

Таблица 2.6.1с

M_1		
0001 +	0 0 0 - +	- 0 0 -
0011 +	0 0 - 1 +	0 - - 1
0101 +	- - 0 1 +	- - 0 1
1100 +	- 0 0 1 +	- 0 - 1
1101 +	- 0 1 1 +	1 - 0 -
	0 - 1 1 +	
	- 1 0 1 +	
	0 1 - 1 +	
	1 - 0 0 +	
	1 1 - 0	
	1 1 0 - +	
	1 - 0 1 +	
1 столбец	2 столбец	3 столбец

Итак, простые импликанты нашей функции таковы:

$xy\bar{w}$, $\bar{y}\bar{z}$, $\bar{x}w$, $\bar{z}w$, $\bar{y}w$, $x\bar{z}$.

Изобразим матрицу Квайна (табл. 2.5.1d), в которой строки соответствуют единичным наборам функции, а столбцы - простым импликантам.

Таблица 2.6.1d

	$xy\bar{w}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}w$	$\bar{z}w$	$\bar{y}w$	$x\bar{z}$
0001		1	1	1	1	
0011			1		1	
0101			1	1		
1100	1					1
1101				1		1

	1	2	3	4	5	6

Как видим, ядровых импликант нет. Для нахождения минимальной ДНФ составим символическую КНФ, каждая элементарная дизъюнкция которой соответствует единичному набору нашей функции, которую преобразуем затем в ДНФ. Получим:

(2∨3∨4∨5)·(3∨5)·(3∨4)·(1∨6)·(4∨6) = (3∨5·4)·(6∨1·4) =

= 3·6∨5·4·6∨3·1·4∨5·1·4.

Видим, что наименьшую длину имеет символическая конъюнкция 3·6, которая соответствует минимальной ДНФ $\overline{x}w \vee x\overline{z}$.

Сложность найденной минимальной ДНФ равна 4.

б) При нахождении минимальной ДНФ с помощью карты Карнау (табл. 2.5.1е), мы доопределяем функцию *f* так, чтобы покрытие имело более простой вид:

Таблица 2.6.1е

zw / xy	00	01	11	10
00	*-0*	**1**	**1**	**0**
01	**0**	**1**	*-1*	*-0*
11	**1**	**1**	**0**	*-0*
10	*-1*	*-1*	*-0*	**0**

Таблица 2.6.1f

zw / xy	00	01	11	10
00	*-0*	**1**	**1**	**0**
01	**0**	**1**	*-1*	*-0*
11	**1**	**1**	**0**	*-0*
10	*-1*	*-1*	*-0*	**0**

Тогда все единицы покроются двумя квадратами 2×2 $\overline{x}w$ и $x\overline{z}$, соответствующая минимальная ДНФ совпадает с ДНФ, найденной в п. а).

в) Для отыскания минимальной КНФ покрываем нули карты Карнау (табл.2.6.1*f*) двумя квадратами 2×2: $x \vee w$ и $\overline{x} \vee \overline{z}$.

Соответствующая минимальная КНФ такова: $(x \vee w)\cdot(\overline{x} \vee \overline{z})$.

Сложность её равна 4.

г) Проведём разложение по набору переменных *xyzw*. На первом этапе, раскладывая по переменной *x*, имеем:

$f(x,y,z,w) = \overline{x}\cdot f(0,y,z,w) \vee x \cdot f(1,y,z,w))$.

Изобразим таблицы функций $f(0,y,z,w)$ и $f(1,y,z,w)$ (табл.2.6.1g):

Таблица 2.6.1g

yzw	$f(0,y,z,w)$
001	1
010	0
011	1
100	1
101	1

yzw	$f(1,y,z,w)$
010	0
100	1
101	1
111	0

Каждая из функций $f(0,y,z,w)$ и $f(1,y,z,w)$ не доопределима до константы, но $f(1,y,z,w)$ доопределима до $\bar{z}$.

Изобразим таблицы (табл.2.6.1h) функций $f(0,0,z,w)$ и $f(0,1,z,w)$:

Таблица 2.6.1h

zw	$f(0,0,z,w)$
01	1
10	0
11	1

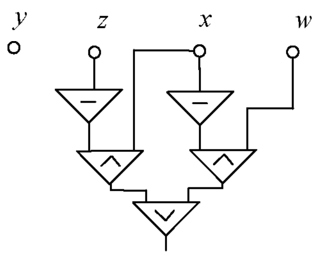
zw	$f(0,1,z,w)$
00	1
01	1

Видим, что $f(0,0,z,w)$ и $f(0,1,z,w)$ доопределимы до w и 1 соответственно.

Получаем разложение исходной функции:

$f(x,y,z,w)=\bar{x}\cdot(\bar{y}\cdot w\vee y\cdot 1)\vee x\cdot\bar{z}=\bar{x}\cdot(w\vee y)\vee x\cdot\bar{z}$. Во время упрощений мы применяли тождества с константами и правило вычёркивания. Сложность полученной формулы оказалась равной 5.

2) В качестве простейшего представления возьмём минимальную ДНФ $\bar{x}w\vee x\bar{z}$ и реализуем её схемой из функциональных элементов (рис.2.6.1a):



3) Реализуем ту же минимальную ДНФ контактной схемой (рис.2.6.1b).

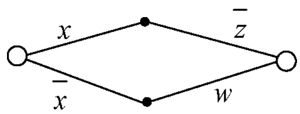


Таблица 2.6.1i

xy \ zw	00	01	11	10
00	-	1	1	0
01	0	1	-	-
11	1	1	0	-
10	-	-	-	0

4) Запишем двумерную таблицу функции f (табл. 2.6.1i):

Видим, что таблица допускает доопределение до строк только двух типов (табл.2.6.1j):

Таблица 2.6.1j

zw \ xy	00	01	10	11	
00	*-0*	**1**	**0**	**1**	I тип
01	**0**	**1**	*-0*	*-1*	I тип
10	*-0*	*-1*	**0**	*-1*	I тип
11	**1**	**1**	*-0*	**0**	II тип

Значит, $f(x,y,z,w)$ допускает разделительную декомпозицию вида $f(x,y,z,w) = g(z,w,h(x,y))$.

Найдём вид функций g и h.

$$h(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если набор } (x,y) \text{ соответствует строке I типа} \\ 0, & \text{если набор } (x,y) \text{ соответствует строке II типа} \end{cases}$$

т.е. $h(x,y) = (1110)$, $h(x,y) = \overline{x} \vee \overline{y}$.

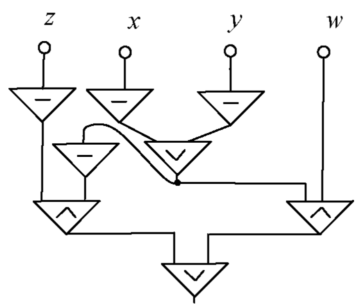
Строкам I типа соответствует функция $\varphi(z,w) = (0101) = w$

Строкам II типа соответствует функция $\psi(z,w) = (1101) = \overline{z}$

Тогда функция f выражается через h, φ, ψ так:

$$f(x,y,z,w) = h(x,y)\cdot\varphi(z,w) \vee \overline{h(x,y)}\cdot\psi(z,w) =$$
$$= (\overline{x} \vee \overline{y})\cdot w \vee \overline{(\overline{x} \vee \overline{y})}\cdot \overline{z}\ .$$

Соответствующая схема из функциональных элементов с ветвлениями будет иметь вид (рис.2.6.1c):



Сложность схемы равна количеству функциональных элементов, её образующих, т.е. 8.

Задание 2.6.2

1. Представить функцию $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ декомпозицией вида $g(x_i, x_k, x_p, h(x_i, x_m, x_n))$, где $x_i, x_k, x_p, x_i, x_m, x_n$ - некоторая перестановка переменных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

2. Реализовать найденную декомпозицию схемой с ветвлениями, используя функциональные элементы типа отрицание, конъюнкция и дизъюнкция. Указать сложность полученной схемы.

3. Построить минимальную ДНФ с помощью карт Карнау, указать сложность найденной формулы

Таблица 2.6.2

№	i	$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$							
1	1	1 - 01	1101	10 - -	1 - 0 -	1 - 1 -	111 -	000 -	- 011
2	2	1 - 1 -	00 - 0	0 - 01	- 001	- - 0 -	11 - 0	01 - 1	0 - 01
3	3	110 -	01 - 0	1 - 11	0 - 00	1 - 11	011 -	111 -	011 -
4	4	- 011	- 000	- 111	- 000	1- 10	100 -	11 - 0	- 001
5	5	0 - 10	- 000	10 - 0	01 - 1	0010	- 11 -	- - 11	- 11 -
6	1	- 001	- - 01	1 - 01	- 101	- - 11	1 - -1	00 - 0	001 -
7	2	- 11 -	0 - 00	0 - - 1	- 00 -	00 - 0	- 10 -	- 101	- 10 -
8	3	- 1 - 0	010 -	11 - -	01 - 0	11 - -	0110	- - 11	0110
9	4	0 - 1 -	00 - -	01 - 1	0 - 00	10 - -	10 - 1	1 - 1 -	100 -
10	5	- 010	- 00 -	- 1 - -	0101	- 01 -	0 - 11	- 1 - 1	1 - - 1
11	1	10 - -	11 - 1	- 001	1 - 01	- 1 - 1	11 - 1	0 - 0 -	0 - 11
12	2	- - 11	00 - 0	- 001	0001	- - 00	1 - 00	010 -	- 101
13	3	1 - 00	- 100	1 - 11	01 - 0	1 - 1 -	011 -	1 - - 1	0 - 10
14	4	- - 11	00 - 0	011 -	- 00 -	1010	- 001	- 110	- 0 - 1
15	5	00 - 0	00 - 0	1010	0 - 01	0 - 10	- 111	1 - 11	- - 1 -
16	1	- 00 -	1 - 01	- 0 - 1	110 -	111 -	11 - 1	000 -	0 - - 1

17	2	111 -	00 - 0	0 - 0 -	000 -	000 -	1 - 00	- 101	0 - 0 -
18	3	- 10 -	01 - 0	1 - 11	0 - 00	1 - 11	- - 10	111 -	0110
19	4	001 -	- 000	- 111	00 - 0	101 -	1001	1 - 1 -	1001
20	5	0 - 1 -	000 -	101 -	01 - 1	00 - 0	01 - 1	11- 1	111 -
21	1	10 - 1	110 -	1 - 01	- 101	- 111	- 11 -	0 - 00	0011
22	2	- 1 - 1	0 - 0 -	- 0 - -	0001	- 0 - 0	1100	- 1 - 1	0101
23	3	1100	- 10 -	- 111	010 -	- 1 - 1	0 - 10	1 - 11	- 1 - 0
24	4	0 - 11	- 000	0 - 11	0 - 00	1 - 10	10 - 1	111 -	10 - 1
25	5	- 01 -	0 - 00	- 0 - 0	0 - 01	- 01 -	0 - - 1	1 - 11	1 - 11
26	1	1001	11 - 1	1 - 01	- - 0 -	1 - 11	1 - 1 -	0 - 00	0 - 1 -
27	2	111 -	0 - 00	0 - 01	0 - 01	00 - -	110 -	0101	01 - 1
28	3	- 100	01 - -	1111	010 -	1 - 1 -	01 - 0	1111	0 - 10
29	4	001 -	0000	01 - 1	00 - 0	10 - 0	1001	- - 1 -	10 - 1
30	5	0 - 10	00 - -	101 -	01 - 1	001 -	0111	- 1 - 1	111 -

Пример решения задания 2.6.2

Решим задание 2.6.2 для $i = 5$ *и функции*

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (10\text{-}1\ \ 0\text{--}0\ \ \text{--}01\ \ \text{-}1\text{--}\ \ 0\text{-}10\ \ 010\text{-}\ \ 1\text{--}0\ \ \text{--}1\text{-})$.

Выпишем значения функции f в виде таблицы (табл. 2.6.2а):

Таблица 2.6.2а

$x_3x_4x_5$ / x_1x_2	000	001	010	011	100	101	110	111
00	1	0	-	1	0	-	0	-
01	-	-	0	1	-	1	-	-
10	0	-	1	0	0	1	0	-
11	1	-	-	0	-	-	1	-

Выясним, возможна ли декомпозиция вида

$f = g(x_5, x_1, x_2, h(x_5, x_3, x_4))$ (*) или

$f = g(x_5, x_3, x_4, h(x_5, x_1, x_2))$ (**)

Для этого выпишем двумерные таблицы функции f для $x_5 = 0$ и $x_5 = 1$ так, чтобы в заголовках строк и столбцов были написаны наборы x_1x_2 и x_3x_4 соответственно. Получим (табл.2.6.2b):

Таблица 2.6.2b

x_3x_4 / x_1x_2	00	01	11	10
00	1	-	0	0
01	-	0	-	-
11	0	1	0	0
10	1	-	-	1

$x_5 = 0$

x_3x_4 / x_1x_2	00	01	11	10
00	0	1	-	-
01	-	1	1	-
11	-	0	1	-
10	-	0	-	-

$x_5 = 1$

Как видим, таблица функции f, соответствующая $x_5 = 0$, не доопределима так, чтобы использовались столбцы только двух типов и не доопределима до вида, в котором используются строки только двух типов. Значит, декомпозиция вида $(*)$ или $(**)$ невозможна.

Проверим, допустима ли декомпозиция вида

$$f = g(x_5, x_2, x_3, h(x_5, x_1, x_4)) \text{ или } f = g(x_5, x_1, x_4, h(x_5, x_2, x_3)).$$

Для этого выпишем двумерные таблицы функции f для $x_5 = 0$ и $x_5 = 1$ так, чтобы в заголовках строк и столбцов были написаны наборы x_2x_3 и x_1x_4 соответственно. Получим (табл.2.6.2c):

Таблица 2.6.2c

x_3x_4 / x_1x_2	00	01	11	10
00	**1**	*-1*	**0**	**1**
01	**0**	**0**	**0**	**0**
11	*-0*	**0**	**1**	*-0*
10	*-1*	*-1*	*-1*	**1**
	I	I	II	I

$x_5 = 0$

x_3x_4 / x_1x_2	00	01	11	10
00	**0**	**1**	*-1*	**0**
01	*-1*	*-1*	**1**	*-1*
11	*-0*	**1**	*-1*	**0**
10	**1**	*-0*	*-0*	*-1*
	I	II	II	I

$x_5 = 1$

Видим, что в этом случае обе таблицы допускают доопределение до столбцов двух типов.

Для $x_5 = 0$ столбцам I типа соответствует функция $\varphi^{(0)}(x_2, x_3) = (1001) = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_2 x_3$, а столбцу II типа – функция $\psi^{(0)}(x_2, x_3) = (0101) = x_2$.

Введём функцию

$$h^{(0)}(x_1, x_4) = \begin{cases} 1, & \text{если набор } (x_1, x_4) \text{ соответствует строке I ти-} \\ 0, & \text{если набор } (x_1, x_4) \text{ соответствует строке II типа} \end{cases}$$

Вектор значений $h^{(0)}(x_1, x_4)$ равен (1101), значит,

$$h^{(0)}(x_1, x_4) = x_1 \vee \bar{x}_4$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, 0) = h^{(0)}(x_1, x_4) \cdot \varphi^{(0)}(x_2, x_3) \vee \overline{h^{(0)}(x_1, x_4)} \cdot \psi^{(0)}(x_2, x_3) =$$
$$= (x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_2 x_3) \vee \overline{x_1 \vee \bar{x}_4} \cdot x_2$$

Рассмотрим таблицу, соответствующую $x_5 = 1$.

Столбцам I типа соответствует функция $\varphi^{(1)}(x_2, x_3) = (0101) = x_3$, столбцам II типа - функция $\psi^{(1)}(x_2, x_3) = (1110) = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$.

Введём функцию

$$h^{(1)}(x_1, x_4) = \begin{cases} 1, & \text{если набор } (x_1, x_4) \text{ соответствует строке I типа} \\ 0, & \text{если набор } (x_1, x_4) \text{ соответствует строке II типа} \end{cases}$$

Вектор значений $h^{(1)}(x_1, x_4)$ равен (1001), значит,

$$h^{(1)}(x_1, x_4) = \bar{x}_1 \bar{x}_4 \vee x_1 x_4.$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, 1) = h^{(1)}(x_1, x_4) \cdot \varphi^{(1)}(x_2, x_3) \vee \overline{h^{(1)}(x_1, x_4)} \cdot \psi^{(1)}(x_2, x_3) =$$
$$= (\bar{x}_1 \bar{x}_4 \vee x_1 x_4) x_3 \vee \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_4 \vee x_1 x_4} \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$$

Получаем искомое представление для f:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\bar{x}_5\cdot f(x_1,x_2,x_3,x_4,0)\vee x_5\cdot f(x_1,x_2,x_3,x_4,1)=$$

$$=\bar{x}_5((x_1\vee\bar{x}_4)(\bar{x}_2\bar{x}_3\vee x_2x_3)\vee\overline{x_1\vee\bar{x}_4}\cdot x_2)\vee x_5((\bar{x}_1\bar{x}_4\vee x_1x_4)x_3\vee\overline{\bar{x}_1\bar{x}_4\vee x_1x_4}\cdot(\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)).$$

2. Реализуем это представление схемой с ветвлениями.

Ввиду громоздкости полученного выражения реализуем схемами S_0 и S_1 соответственно $f(x_1,x_2,x_3,x_4,0)$ и $f(x_1,x_2,x_3,x_4,1)$, а саму функцию реализуем блок-схемой S.

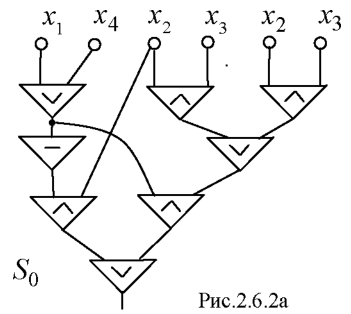


Рис.2.6.2a

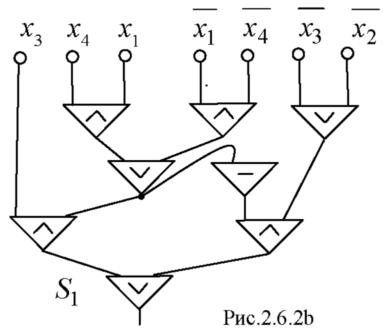


Рис.2.6.2b

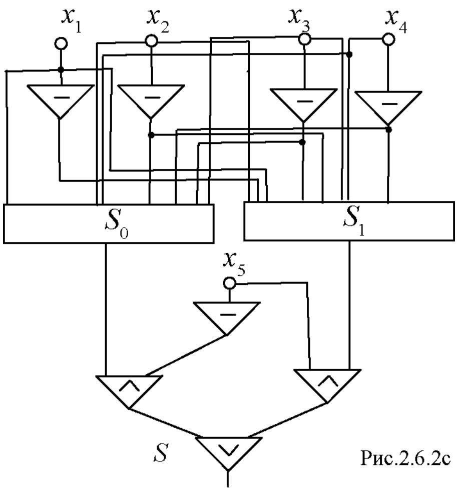


Рис.2.6.2c

Таблица 2.6.2d

x_4x_5 / $x_1x_2x_3$	00	01	11	10
000	1	0	1	-
001	0	-	-	0
011	-	1	-	-
010	-	-	1	0
100	0	-	0	1
101	0	1	-	0
111	-	-	-	1
110	1	-	0	-

Сложность построенной схемы равна 24.

3. Найдём минимальную ДНФ с помощью карты Карнау (табл. 2.6.2d).

Все единицы карты Карнау могут быть покрыты двумя двухслойными прямоугольниками и тремя однослойными. Минимальная ДНФ будет иметь вид:

$$x_3 \cdot x_5 \vee \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 \cdot \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \cdot x_4 \cdot x_5 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_5}$$

Её сложность равна 16.

Задание 2.6.3

1. С помощью частных производных найти оптимальный для метода каскадов порядок дизъюнктивного разложения функции $f(x, y, z, w)$ по её переменным на первых двух этапах.

2. Используя результаты п.1, построить контактную схему методом каскадов, указать сложность построенной контактной схемы.

Таблица 2.6.3

№	$f(x,y,z,w)$	№	$f(x,y,z,w)$
1	1110 0110 1010 1101	**16**	0111 0101 1101 1111
2	0011 1100 1101 0111	**17**	0010 1011 1101 1110
3	0110 1101 1100 1111	**18**	0011 1110 1101 0000
4	1110 0111 1100 0111	**19**	0101 1010 1111 1101
5	0010 1110 1111 0011	**20**	0101 1101 1110 0011
6	1110 1101 0010 1111	**21**	0010 1101 1001 0110
7	1110 1010 0010 0110	**22**	1110 1101 0101 1010
8	1110 1000 1111 0110	**23**	0010 1010 1110 1111
9	1101 0110 1110 0001	**24**	0110 1001 1100 1101
10	1011 0111 1010 0110	**25**	0010 0000 1000 1110
11	1101 0001 0010 1111	**26**	0010 1010 0001 1111

12	1110 0100 1110 1001	**27**	0101 1101 0000 1011
13	0001 1000 1100 0110	**28**	1101 1000 0110 1110
14	1101 1111 0010 1101	**29**	1000 1010 0101 1001
15	1001 1101 0011 1000	**30**	1101 0111 1101 0011

Пример решения задания 2.6.3.

Решим задание 2.6.3. для функции $f(x,y,z,w) = (1010\ 0100\ 0100\ 1010)$. Запишем таблицу функции $f(x,y,z,w)$ в виде карты Карнау (табл. 2.6.3a):

Таблица 2.6.3a

xy \ zw	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	0	0
11	1	0	0	1
10	0	1	0	0

Найдём полином Жегалкина:

$$f(x,y,z,w) = \sum_{\substack{(a,b,c,d) \\ f(a,b,c,d)=1}} (x+\overline{a})(y+\overline{b})(z+\overline{c})(w+\overline{d}) =$$

$$= 1 + x + y + w + xzw + yzw.$$

Определим оптимальный для метода каскадов порядок разложения.

По определению, $f'_x(x,y,z,w) = f(0,y,z,w) + f(1,y,z,w)$.

Таблица для f'_x имеет вид (табл. 2.6.3b):

Таблица 2.6.3b

y \ zw	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	1	1	0	1

Видим, что $|f'_x| = 6$.

Аналогично, $f'_y(x,y,z,w) = f(x,0,z,w) + f(x,1,z,w)$.

Таблица для f'_y имеет вид (табл. 2.6.3c):

Таблица 2.6.3c

x \ zw	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	1	1	0	1

Видно, что $|f_y'| = 6$.

Продолжаем отыскание частных производных.

$f_z'(x,y,z,w) = f(x,y,0,w) + f(x,y,1,w)$.

Таблица 2.6.3d

w / xy	0	1
00	1	0
01	1	1
11	1	0
10	1	1

Таблица для f_z' имеет вид (табл. 2.6.3d):

Заметим, что $|f_z'| = 2$.

И далее, $f_w'(x,y,z,w) = f(x,y,z,0) + f(x,y,z,1)$.

Таблица для f_w' имеет вид (табл. 2.6.3e):

Таблица 2.6.3e

z / xy	0	1
00	1	0
01	1	1
11	1	0
10	1	1

Как видно, $|f_w'| = 6$.

Так как набольшее число единиц в табли- ли- це имеют f_x', f_y' и f_w', то на 1 и 2 эта- пах метода каскадов разложение ведём по лю- бой из переменных x,y,w. Выберем, на- пример, в качестве первой переменной, по которой будем проводить разложение, x, а второй - w.

Получим: $f(x,y,z,w) = \overline{x} \cdot f(0,y,z,w) \vee x \cdot f(1,y,z,w)$.

Выпишем таблицы функций $f(0,y,z,w)$ и $f(1,y,z,w)$ (табл. 2.6.3f).

Таблица 2.6.3f

zw / y	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	0	0

$f(0,y,z,w)$

zw / y	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	0	0	1

$f(1,y,z,w)$

3. Строим контактную схему методом каскадов (рис.2.6.3а):

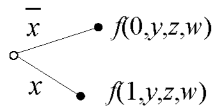


Рис.2.6.3а

На втором этапе разложение ведём по переменной w.

$f_0(y,z,w) = \overline{w} \cdot f_0(y,z,0) \vee w \cdot f_0(y,z,1) =$

$= \overline{w} \cdot (1 + y + 0 + 0) \vee w \cdot (1 + y + 1 + yz) =$

$= \overline{w} \cdot (1 + y) \vee w \cdot (y + yz) = \overline{w} \cdot \overline{y} \vee w \cdot y \cdot (1 + z) = \overline{w} \cdot \overline{y} \vee w \cdot y \cdot \overline{z}$.

$f_1(y,z,w) = \overline{w} \cdot f_1(y,z,0) \vee w \cdot f_1(y,z,1) =$

$= \overline{w} \cdot (y + 0) \vee w \cdot (y + 1 + z + yz) = \overline{w} \cdot y \vee w \cdot f_{11}(y,z)$.

Осталось разложить функцию $f_{11}(y,z)$.

$f_{11}(y,z) = \overline{z} \cdot f_{11}(y,0) \vee z \cdot f_{11}(y,1) = \overline{z} \cdot (y + 1) \vee z \cdot (y + 1 + 1 + y) =$

$= \overline{z} \cdot \overline{y} \vee z \cdot 0 = \overline{z} \cdot \overline{y}$.

Изобразим полученную контактную схему (рис.2.6.3b):

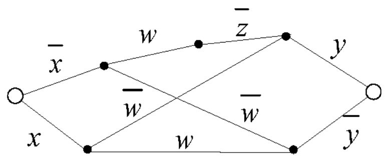


Рис.2.6.3b

Сложность построенной схемы равна количеству контактов в ней, т.е. 8.

Задание 2.6.4

Для функции $f(x,y,z,t)$, заданной своей ДНФ:

1. Построить таблицу данной булевой функции.

2. Найти минимальную ДНФ. Исходя из минимальной ДНФ, построить контактную схему.

3. Построить контактную схему методом каскадов, отыскав оптимальный порядок разложения переменных с помощью частных производных.

4. Исходя из простейшей контактной схемы, построить минимальный тест для нахождения неисправности :

а) для вариантов с чётными номерами - типа замыкания ровно одного контакта;

б) для вариантов с нечётными номерами - типа размыкания ровно одного контакта.

Таблица 2.6.4

№	$f(x,y,z,t)$	№	$f(x,y,z,t)$
1	$x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyzt \vee yz\bar{t}$	**16**	$x\bar{y}t \vee xy\bar{z} \vee xyzt \vee \bar{x}yt$
2	$xy\bar{z}t \vee x\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}yzt \vee \bar{x}z\bar{t} \vee \bar{y}z$	**17**	$x\bar{y}zt \vee \bar{y}\bar{z}t \vee xyz\bar{t} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y$
3	$xy\bar{z}t \vee xy\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee xz\bar{t}$	**18**	$x\bar{y}zt \vee y\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}t$
4	$xyz\bar{t} \vee \bar{x}\bar{z}t \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{t}$	**19**	$x\bar{y}zt \vee y\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{z}t$
5	$xy\bar{z}t \vee x\bar{y}z\bar{t} \vee \bar{x}z\bar{t}$	**20**	$x\bar{y}zt \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}t \vee y\bar{z}t$
6	$\bar{x}zt \vee xyzt \vee y\bar{z}t \vee yz\bar{t}$	**21**	$xy\bar{t} \vee x\bar{y}t \vee xyzt \vee y\bar{z}t$
7	$xyz\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{t} \vee x\bar{y}zt \vee x\bar{y}t \vee \bar{z}t$	**22**	$xyz\bar{t} \vee x\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}yzt \vee \bar{x}\bar{z}t \vee \bar{y}t$
8	$\bar{x}yzt \vee x\bar{y}\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{t}$	**23**	$xy\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{t}$
9	$xyz\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}t$	**24**	$xy\bar{z}t \vee \bar{x}yz\bar{t} \vee \bar{y}z\bar{t}$
10	$xyz\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}z\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}yt$	**25**	$xy\bar{z}t \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{t} \vee yz\bar{t}$
11	$xz\bar{t} \vee x\bar{y}t \vee \bar{x}zt \vee xyzt$	**26**	$xzt \vee x\bar{z}t \vee xyzt \vee \bar{y}zt$
12	$\bar{x}yzt \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xy\bar{z}t \vee xy\bar{z} \vee x\bar{t}$	**27**	$x\bar{y}zt \vee x\bar{y}\bar{t} \vee \bar{x}yzt \vee \bar{x}y\bar{t} \vee y\bar{z}$
13	$x\bar{y}zt \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z\bar{t}$	**28**	$xy\bar{z}t \vee \bar{y}z\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}t$

14	$\bar{x}yzt \vee x\bar{y}z\bar{t} \vee x\bar{y}\bar{z}$
15	$\bar{x}yzt \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}t \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z\bar{t}$

29	$xy\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}zt \vee \bar{x}z\bar{t}$
30	$xy\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}t \vee x\bar{y}\bar{z}t \vee x\bar{y}z$

Пример решения задания 2.6.4.

Таблица 2.6.4а

$xy \backslash zt$	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	0	0	0
11	1	1	1	0
10	1	1	1	1

Решим задание 2.6.4 для

$f(x,y,z,t) = \bar{x}\,\bar{y}z\bar{t} \vee x\bar{y} \vee xyt \vee x\bar{z}\,\bar{t}$, выбрав в п.4 неисправность типа размыкания ровно одного контакта.

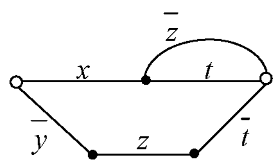
1. Построим таблицу функции $f(x,y,z,t)$ в виде карты Карнау (табл. 2.6.4а).

2. Все единицы карты Карнау покрываем тремя прямоугольниками.

Соответствующая минимальная ДНФ будет иметь вид $\bar{y}z\bar{t} \vee xt \vee x\bar{z}$.

Упростим формулу: $\bar{y}z\bar{t} \vee xt \vee x\bar{z} = \bar{y}z\bar{t} \vee x(t \vee \bar{z})$.

Реализуем это представление контактной схемой (рис. 2.6.4):



3. При отыскании оптимального порядка разложения по методу каскадов заметим, что $|f_x'| = 6,\ |f_y'| = 2,\ |f_z'| = 2,\ |f_t'| = 2.$

Так, что на первом шаге разложение будем производить по переменной x, а на втором этапе можно проводить разложение по любой оставшейся переменной, например, по y.

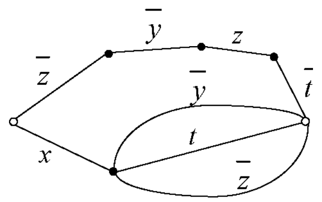
Получаем:

$f(x,y,z,t) = \bar{x} \cdot f(0,y,z,t) \vee x \cdot f(1,y,z,t) =$

$= \bar{x} \cdot (\bar{y}z\bar{t}) \vee x \cdot (\bar{y} \vee yt \vee \bar{z}\,\bar{t}) =$

$= \bar{x}\,\bar{y}z\bar{t} \vee x \cdot (\bar{y} \vee t \vee \bar{z}\,\bar{t}) = \bar{x}\,\bar{y}z\bar{t} \vee x \cdot (\bar{y} \vee t \vee \bar{z})$.

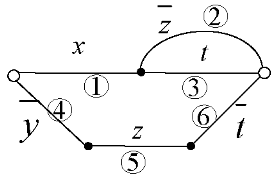
Разложение по y нет необходимости делать.



Строим контактную схему (рис. 2.6.4b):

4. Так как контактная схема, полученная в п.2, имеет более простой вид, будем работать с ней.

Занумеруем все контакты схемы (рис. 2.6.4c):

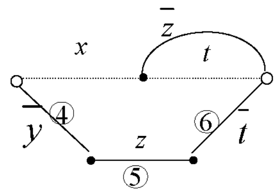


Неисправность типа размыкания контакта означает, что при любых значениях аргументов соответствующий контакт разомкнут, т.е. реализует функцию 0. Разомкнутый контакт будем изображать пунктирной линией, а замкнутый - сплошной. Для каждого из единичных наборов функции на соответствующем изображении контактной схемы полюсы соединены цепью контактов из сплошных линий. На каждом же из нулевых наборов функции такой цепи не найдётся.

Пусть $f_0(x,y,z,t) = f(x,y,z,t)$, а при неисправности i - го контакта схема реализует функцию $f_i(x,y,z,t)$.

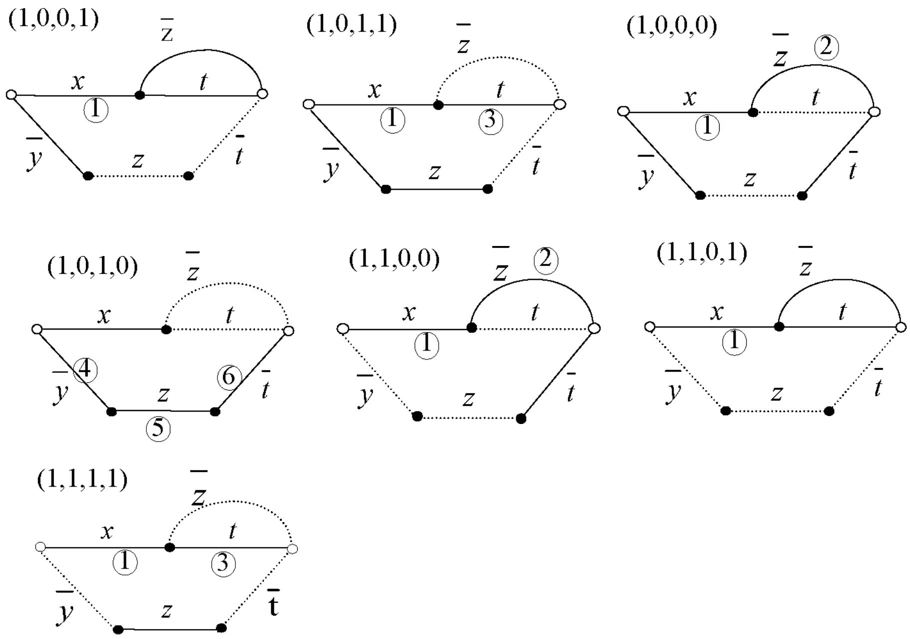
Если исправно работающая контактная схема на некотором наборе аргументов принимает значение 0, значит, на её изображении между полюсами нет цепи из сплошных линий. Ясно, что при наличии неисправности типа размыкания контакта на том же наборе аргументов полюсы контактной схемы тем более не соединены цепью из сплошных линий. Значит, на всех нулевых наборах функции $f(x,y,z,t)$ все функции $f_i(x,y,z,t)$, $i = 1,2,\ldots,6$ также принимают значение, равное 0.

При построении теста нас не интересуют наборы аргументов, на которых значения всех функций совпадают, поэтому напишем таблицу всех функций $f_i(x,y,z,t)$, $i = 1,2,\ldots,6$, вписывая в неё только те наборы аргументов, на которых исходная функция равна 1.



При заполнении таблицы для каждого набора аргументов изобразим схему. Например, для набора (0,0,1,0) схема примет вид (рис.2.6.4d):

Видим, что цепь из сплошных линий, соединяющая полюсы схемы, разрывается, если разомкнут 4, 5 или 6 контакт, т.е. на наборе (0,0,1,0) значение 0 принимают функции f_4, f_5 и f_6. Изобразим вид контактной схемы на всех единичных наборах функции $f(x,y,z,t)$ (рис.2.6.4e).



Заполняем “таблицу неисправностей”, вписывая для каждого набора аргументов нули в столбцы, соответствующие функциям с номерами, записанными в кружочках. Получим следующую таблицу (табл. 2.6.4b):

Видим, что некоторые столбцы таблицы совпадают. Это означает, что неисправности типа размыкания одного контакта неотличимы в случае разомкнутости 4, 5 или 6 контактов.

Таблица 2.6.4b

xyzt	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
0100	1	1	1	1	0	0	0
1000	1	0	0	1	1	1	1
1001	1	0	1	1	1	1	1
1010	1	1	1	1	0	0	0
1011	1	0	1	0	1	1	1
1100	1	0	0	1	1	1	1
1101	1	0	1	1	1	1	1
1111	1	0	1	0	1	1	1

Объединяем неотличимые неисправности в классы неисправностей.

Получим 5 классов:

$$g_0 = \{f_0\},\ g_1 = \{f_1\},\ g_2 = \{f_2\},\ g_3 = \{f_3\},\ \ g_4 = \{f_4, f_5, f_6\}.$$

Строим таблицу классов неисправностей, таблицу, не содержащую одинаковых столбцов.

Отметим, что если в таблице присутствуют одинаковые строки, то мы ничего не потеряем, если для каждого набора одинаковых строк оставим одного представителя, удалив остальные строки из таблицы.

Получим (табл. 2.6.4c):

Выясним, какие из наборов 1-5 войдут в минимальный тест. Для этого выпишем все сочетания индексов $\{i,k\}$, и для каждого сочетания укажем номера наборов, на которых отличаются функции g_i и g_k.

Таблица 2.6.4c

№	*xyzt*	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4
1	0100	1	1	1	1	0
2	1000	1	0	0	1	1
3	1001	1	0	1	1	1
4	1010	1	1	1	1	0
5	1111	1	0	1	0	1

Будем иметь: $\dfrac{0,1}{2\vee 3\vee 5}$; $\dfrac{0,2}{2}$; $\dfrac{0,3}{5}$; $\dfrac{0,4}{1\vee 4}$; $\dfrac{1,2}{3\vee 5}$; $\dfrac{1,3}{2\vee 3}$; $\dfrac{1,4}{1\vee 2\vee 3\vee 4\vee 5}$; $\dfrac{2,3}{2\vee 5}$; $\dfrac{2,4}{1\vee 2\vee 4}$; $\dfrac{3,4}{1\vee 4\vee 5}$.

Теперь составим символическую КНФ из “знаменателей” полученных выражений K_T. Будем иметь:

$$K_T = (2\vee 3\vee 5)\cdot 2\cdot 5\cdot (1\vee 4)\cdot (3\vee 5)\cdot (2\vee 3)\cdot (1\vee 2\vee 3\vee 5)\cdot (2\vee 5)\cdot$$

$\cdot (1 \vee 2 \vee 4) \cdot (1 \vee 4 \vee 5).$

Упростим полученное выражение, применяя формулу поглощения.

Получим: $K_T = 2 \cdot 5 \cdot (1 \vee 4).$

С помощью дистрибутивного закона преобразуем это выражение в ДНФ, тогда каждой символической конъюнкции будет соответствовать минимальный тест. Имеем: $K_T = 2 \cdot 5 \cdot (1 \vee 4) = 2 \cdot 5 \cdot 1 \vee 2 \cdot 5 \cdot 4.$

В качестве минимального теста можно взять, например, совокупность 1, 2 и 5 наборов, т.е. найден минимальный тест

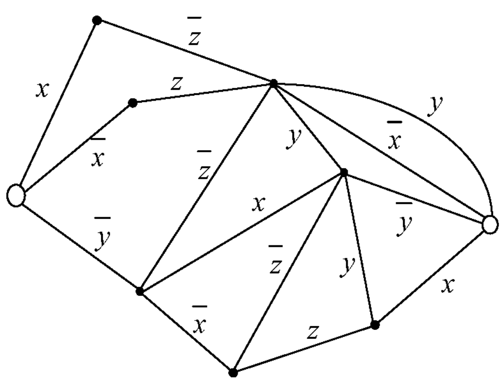
$T_{min} = \{(0,1,0,0), (1,0,0,0), (1,1,1,1)\}.$

Задание 2.6.5

1. Построить таблицу значений функции, реализуемой данной контактной схемой.

2. Найти минимальную ДНФ с помощью карты Карнау, построить на её основе контактную схему, равносильную исходной.

Таблица 2.6.5

1	

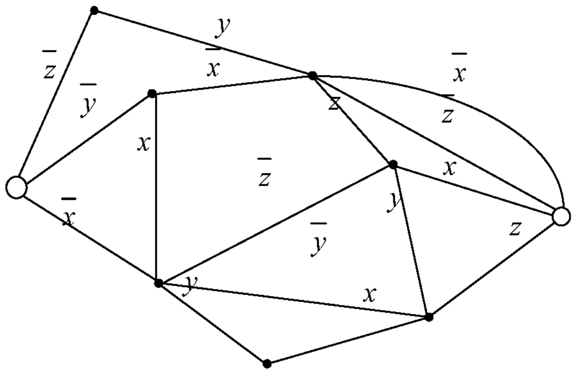
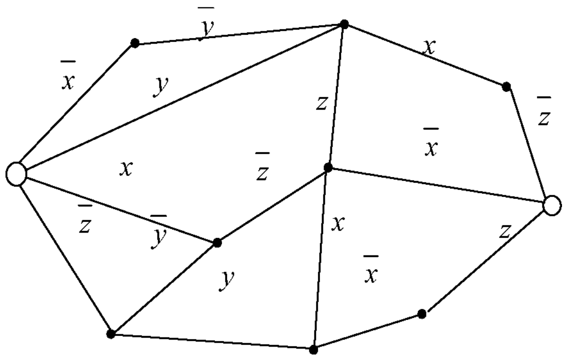
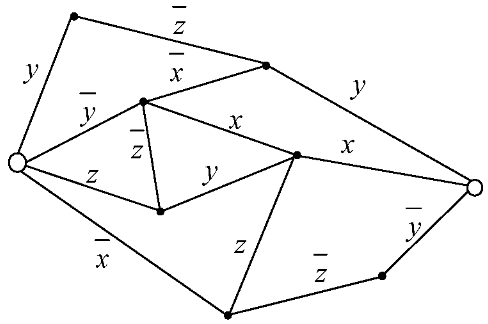
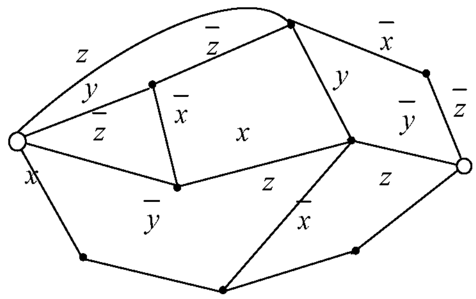
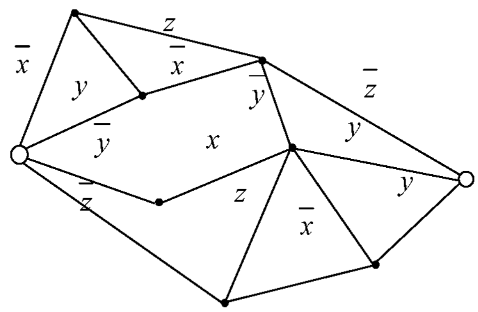
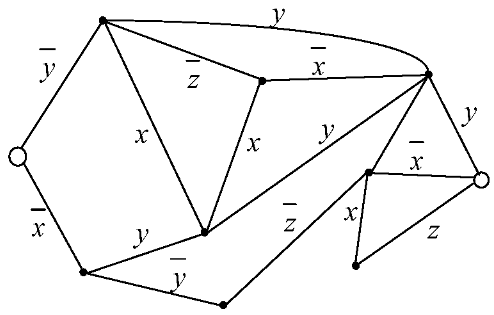
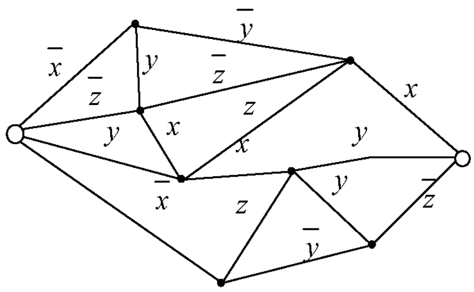
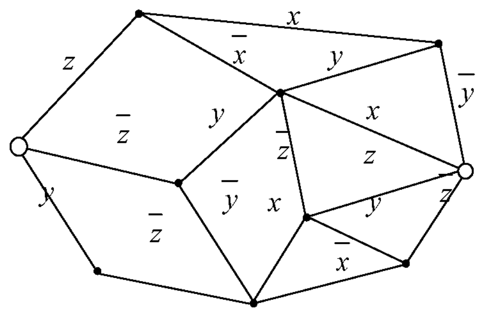
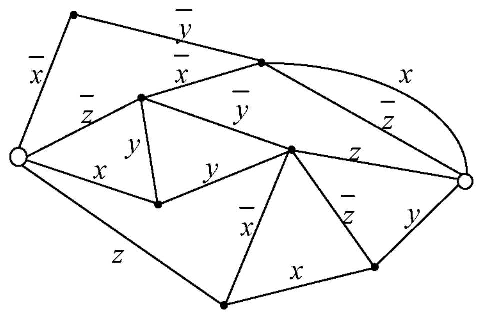
2	

Таблица 2.6.5(продолжение)

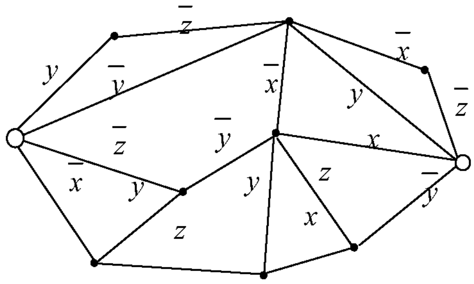
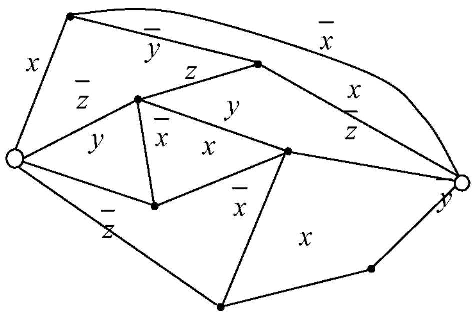
3	

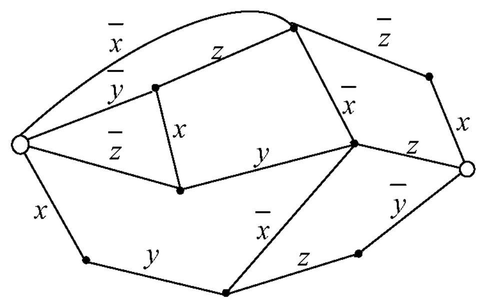
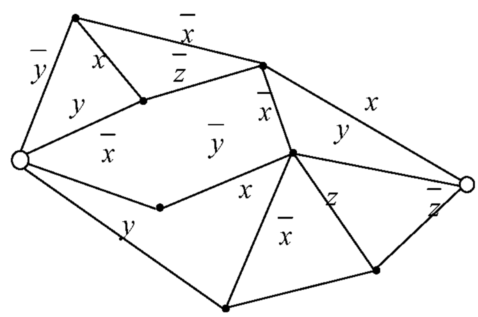
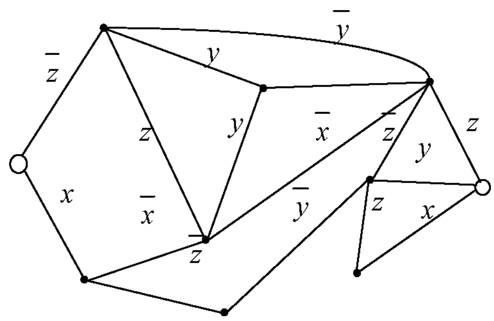
4	y $\bar{z}$ $\bar{x}$ y $\bar{y}$ x $\bar{z}$ x z y $\bar{y}$ z $\bar{x}$ $\bar{z}$
5	z $\bar{z}$ $\bar{x}$ y y $\bar{z}$ $\bar{x}$ x $\bar{y}$ $\bar{z}$ x z z $\bar{y}$ $\bar{x}$
6	z $\bar{x}$ $\bar{x}$ y $\bar{y}$ $\bar{z}$ y $\bar{y}$ x y $\bar{z}$ z $\bar{x}$

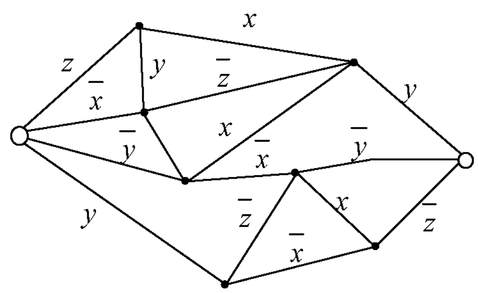
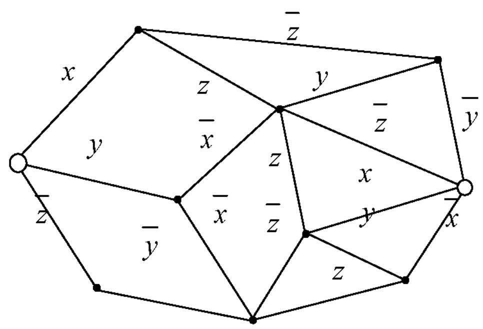
7	 y $\bar{y}$ $\bar{z}$ $\bar{x}$ y x x y $\bar{x}$ $\bar{x}$ y $\bar{z}$ x z $\bar{y}$
8	 $\bar{y}$ $\bar{x}$ y $\bar{z}$ $\bar{z}$ x z y x x y $\bar{x}$ z y $\bar{z}$ $\bar{y}$

9	
10	

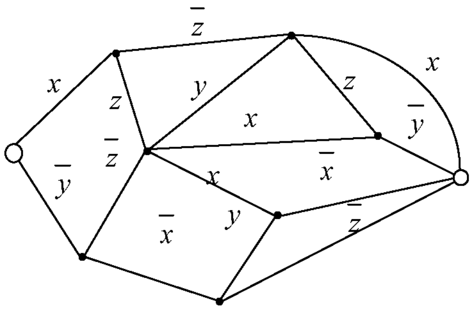
9:
x
z
$\bar{x}$
y
$\bar{y}$
$\bar{z}$
y
x
$\bar{z}$
z
y
$\bar{y}$
x
y
z
$\bar{z}$
$\bar{x}$
10:
$\bar{y}$
$\bar{x}$
$\bar{x}$
x
$\bar{z}$
$\bar{y}$
$\bar{z}$
y
z
x
y
$\bar{x}$
$\bar{z}$
y
z
x

11	$\bar{z}$ $\bar{x}$ y $\bar{y}$ $\bar{x}$ y $\bar{z}$ $\bar{z}$ $\bar{y}$ x $\bar{x}$ y z $\bar{y}$ y x z
12	$\bar{x}$ x $\bar{y}$ z x $\bar{z}$ y $\bar{z}$ y $\bar{x}$ x $\bar{y}$ $\bar{x}$ $\bar{z}$ x

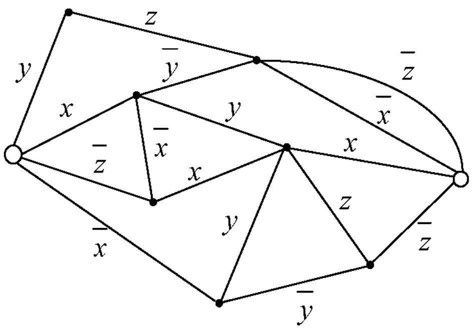
13	$\bar{x}$ z $\bar{z}$ $\bar{y}$ $\bar{x}$ x x $\bar{z}$ y z $\bar{y}$ x $\bar{x}$ y z
14	$\bar{x}$ $\bar{y}$ x $\bar{z}$ y $\bar{x}$ x y $\bar{y}$ $\bar{x}$ x z $\bar{z}$ y $\bar{x}$
15	$\bar{y}$ y $\bar{z}$ z y $\bar{x}$ $\bar{z}$ z y x z $\bar{y}$ $\bar{x}$ x $\bar{z}$

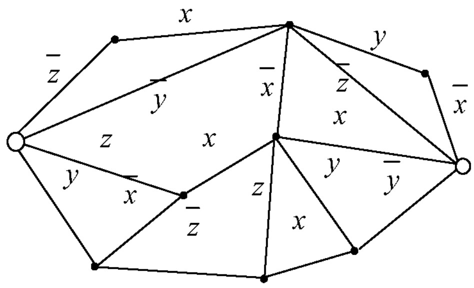
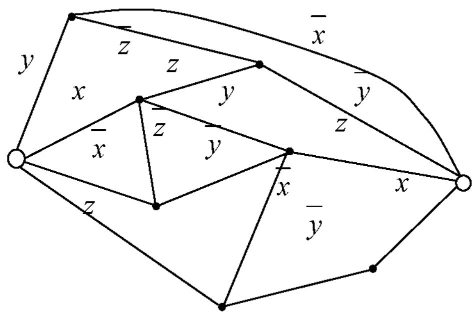
16	 x z y $\bar{z}$ y $\bar{x}$ x $\bar{y}$ $\bar{x}$ $\bar{y}$ y $\bar{z}$ x $\bar{z}$ $\bar{x}$
17	 $\bar{z}$ x z y $\bar{y}$ $\bar{z}$ y $\bar{x}$ z x $\bar{z}$ $\bar{x}$ $\bar{z}$ y $\bar{x}$ $\bar{y}$ z

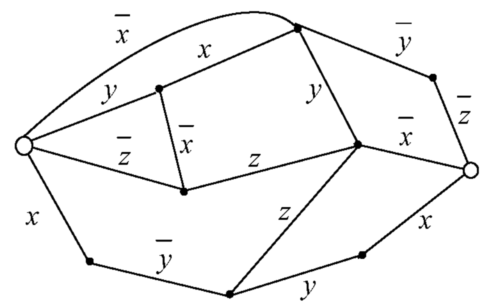
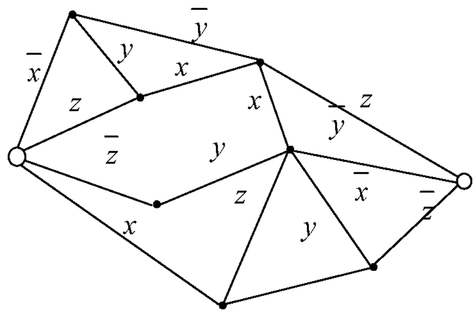
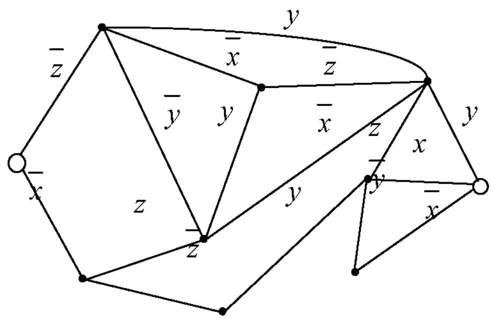
18


$\bar{z}$
x
x
z
y
z
x
$\bar{y}$
$\bar{z}$
$\bar{y}$
x
$\bar{x}$
$\bar{x}$
y
$\bar{z}$

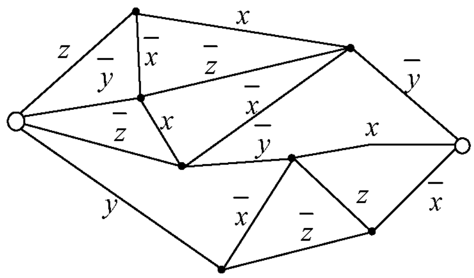
19


z
y
$\bar{y}$
$\bar{z}$
x
y
$\bar{x}$
$\bar{x}$
x
$\bar{z}$
x
y
z
$\bar{z}$
$\bar{x}$
$\bar{y}$

20	
21	

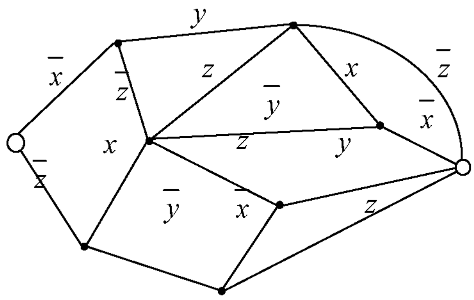
22	
23	
24	

25

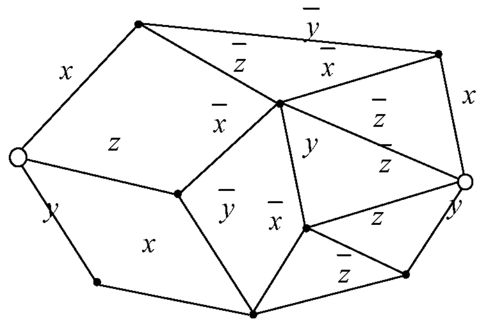
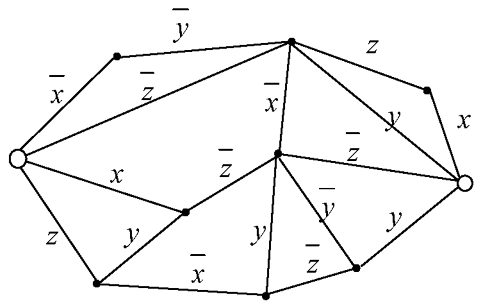


x
z
$\bar{x}$
$\bar{z}$
$\bar{y}$
$\bar{y}$
$\bar{x}$
x
$\bar{z}$
$\bar{y}$
x
z
y
$\bar{x}$
$\bar{z}$
$\bar{x}$

26

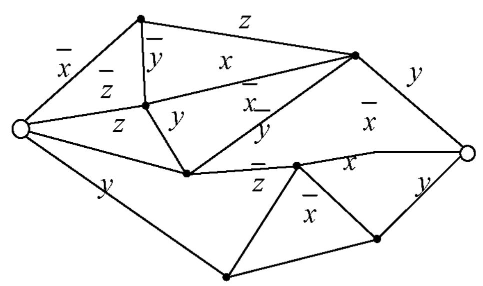
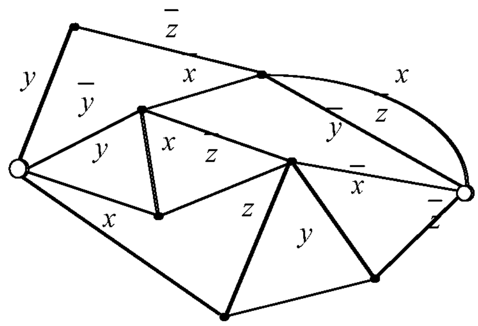


y
$\bar{x}$
z
x
$\bar{z}$
$\bar{z}$
$\bar{y}$
$\bar{x}$
x
z
y
$\bar{z}$
$\bar{y}$
$\bar{x}$
z

27	
28	

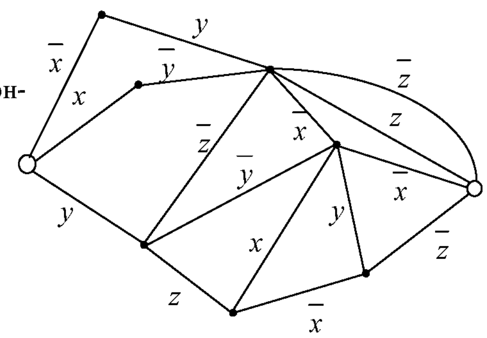
$\bar{y}$
$\bar{z}$ $\bar{x}$
x x
$\bar{x}$ $\bar{z}$
z y $\bar{z}$
y $\bar{y}$ $\bar{x}$ z y
x
$\bar{z}$

$\bar{y}$
z
$\bar{x}$ $\bar{z}$ $\bar{x}$
y x
x $\bar{z}$ $\bar{z}$
$\bar{y}$
z y y y
$\bar{x}$ $\bar{z}$

29	
30	

Пример решения задания 2.6.5.

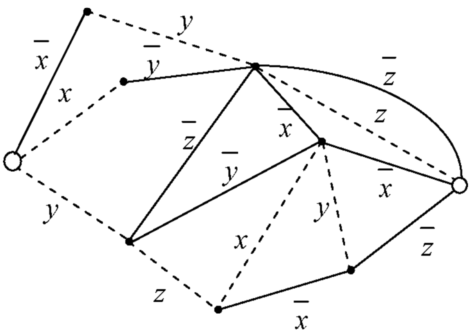
Решим задание 2.6.5. для контактной схемы:



Рассмотрим вид контактной схемы на всех 8 наборах переменных x,y,z , изображая разомкнутые контакты пунктирной линией, а замкнутые – сплошной:

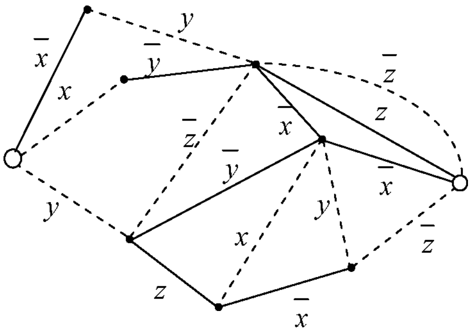
Рассмотрим набор (0,0,0).

Видим, что в данном случае между полюсами нет маршрута, составленного из сплошных линий, значит, на этом наборе функция, реализованная данной схемой, равна нулю, $f(0,0,0) = 0$

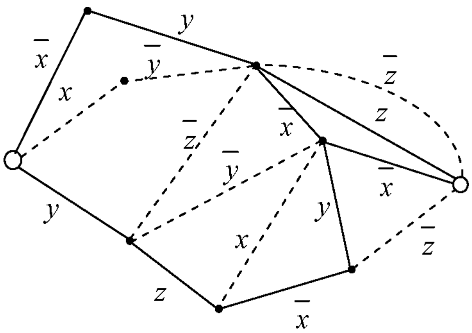


Рассмотрим изображение схемы на остальных наборах:

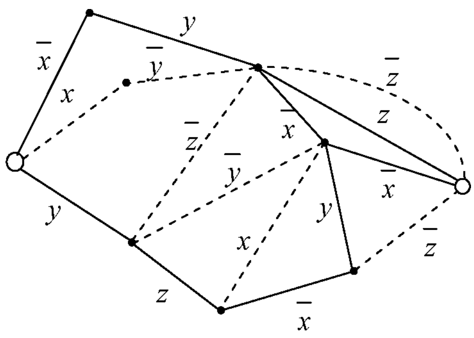
$f(0,0,1)=0$



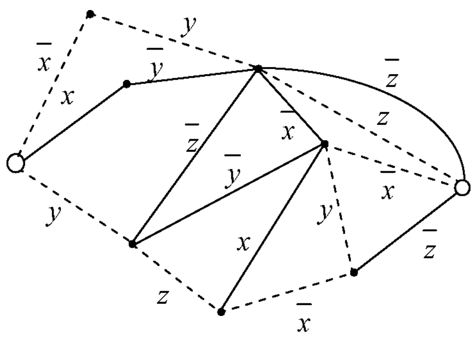
$f(0,1,0) = 1$



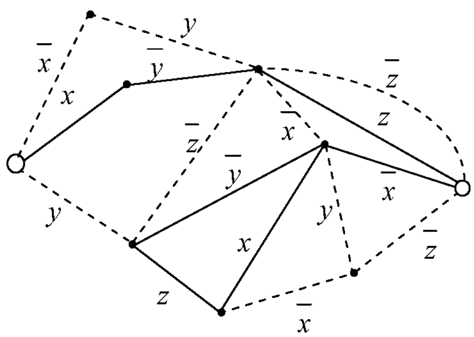
$f(0,1,1) = 1$

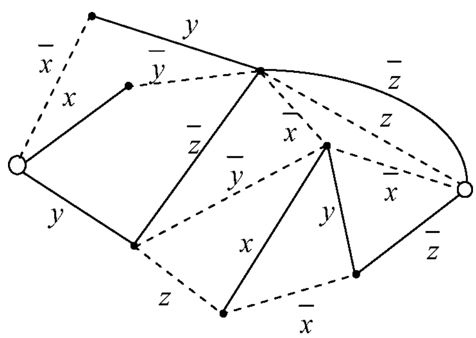


$f(1,0,0) = 1$



$f(1,0,1) = 1$





$f(1,1,0) = 1$

$f(1,1,1) = 0$

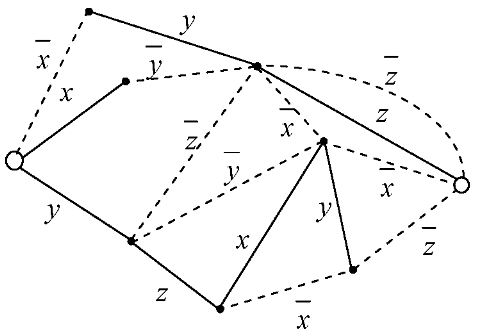


Таблица 2.6.5а

z / xy	0	1
00	0	0
01	1	1
11	1	0
10	1	1

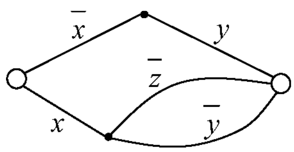
Запишем найденные значения функции $f(x,y,z)$ в карту Карнау (табл. 2.6.5а).

Минимальная ДНФ : $\bar{x}y \vee x\bar{z} \vee x\bar{y}$.

Преобразуем формулу:

$\bar{x}y \vee x\bar{z} \vee x\bar{y} = \bar{x}y \vee x(\bar{z} \vee \bar{y})$.

Соответствующая контактная схема имеет вид:



Задание выполнено.

Глава 3. Теория алгоритмов

3.1 Машины Тьюринга

Машиной Тьюринга называется пятёрка объектов

$T = (A, S, \delta, \nu, \mu)$, где $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ - *алфавит*;

$S = \{s_0, s_1, \ldots, s_m\}$ - *множество внутренних состояний*, причём s_0 - *заключительное*, а s_1 - *начальное* состояния.

$\delta : A \times S \to S$ - *функция перехода*;

$\nu : A \times S \to A$ - *функция выхода*;

$\mu : A \times S \to \{П, Л, Н\}$ - *функция управления*.

Командой машины Тьюринга называется запись вида $a_k s_i \to a_p D s_j$, где a_p, D, s_j - значения на наборе $(a_k s_i)$ функций δ, μ и ν соответственно.

Программой машины Тьюринга называется набор всех её команд.

Работа машины Тьюринга связана с бесконечной лентой, разбитой на ячейки, причём в каждой ячейке может быть записан один символ некоторого алфавита, причём λ является символом пустой ячейки.

Работа машины Тьюринга над словом α, записанным на ленте, проходит следующим образом:

машина Тьюринга начинает свою работу всегда в состоянии s_1, а её считывающее устройство расположено над первым слева символом слова, записанного на ленте;

считав символ в ячейке, обозреваемой считывающим устройством машины Тьюринга, она печатает в эту ячейку символ, найденный с помощью функции выхода ν, двигается вдоль ленты вправо, влево или остаётся на месте, в случае, если функция μ принимает значения П, Л, или Н соответственно и переходит в состояние, определяемое с помощью функции перехода δ;

при переходе машины Тьюринга в состояние s_0 считают, что она закончила работу над словом α и говорят, что машина Тьюринга *применима* к слову α.

Если машина Тьюринга при работе над словом α не переходит в состояние s_0, то говорят, что она *не применима* к слову α.

Конфигурацией машины Тьюринга называется запись $\alpha_1 \underset{s_k}{b} \alpha_2$, где b - символ ячейки, обозреваемой считывающим устройством машины Тьюринга, находящейся в состоянии s_k, а α_1 и α_2 - слова, записанные на ленте соответственно левее и правее символа b.

Кодом машины Тьюринга называется запись набора её команд в алфавите $\{*,1\}$, позволяющая однозначно восстанавливать каждую команду.

Машина Тьюринга называется *самоприменимой (несамоприменимой)*, в случае, ели она применима (не применима) к своему коду.

Числовой функцией называется функция вида $f : N_0^k \to N_0$, $\quad k \in N$.

Изображением набора аргументов $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ называется запись вида $1^{x_1+1}\lambda 1^{x_2+1}\lambda 1^{x_3+1}\lambda \ldots \lambda 1^{x_k+1}$ $\qquad$ (*), $\qquad$ где $1^z = \underbrace{11\ldots1}_{z\ \text{ðàç}}$.

Числовая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ называется *вычислимой по Тьюрингу*, если существует машина Тьюринга, применимая к любому слову вида (*), переводящая его в слово 1^{y+1}, где $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

Задание 3.1.1

1. Построить машину Тьюринга, применимую ко всем словам $x_1 x_2 \ldots x_n$ в алфавите $\{a, b\}$ и переводящую их в слово α

2. Проверить работу машины Тьюринга над некоторыми словами.

Таблица 3.1.1

№	α
1	$x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n \lambda x_{n-1}$
2	$x_1 \lambda x_3 \ldots x_{n-1}$, если $x_2 = a$, $\quad x_3 x_4 \ldots x_n$, если $x_2 = b$

Таблица 3.1.1(продолжение)

№	α
3	$x_1x_2\dots x_n$, если в данном слове количество букв a нечётно, bb, если чётно
4	$x_1\lambda x_3\lambda\dots\lambda x_n$, если n нечётно, $x_1x_2\dots x_n$, если n - чётно
5	$x_2\ a\ x_1$
6	$x_1x_2\dots x_{n-1}x_nx_{n-1}\dots x_1$
7	$baba$, если слово начинается на ba, $x_1x_2\dots x_na$ в других случаях
8	$bx_1\dots x_n$, если $x_n=a$, bb, если $x_n=b$
9	ab, если n - чётно, x_n, если n - нечётно
10	a^n, если $x_{n-1}=a$, $x_1x_2\dots x_{n-2}ab$, если $x_{n-1}=b$
11	$x_1x_3x_2x_4x_5\dots x_n$
12	$ax_1x_2\dots x_{n-2}b$
13	a, если $n<4$, $x_1\dots x_n$, если $n>3$
14	$a\ a$, если в данном слове число букв нечётно, $x_1x_2\dots x_{n-1}$, если чётно
15	$x_1x_2\dots x_{n-1}x_nx_n$, если $x_2=a$, $x_1\dots x_n$, если $x_2=b$
16	bab, если слово начинается на ab, x_1x_2 в других случаях
17	$x_1x_2\dots x_nb$, если n - чётно, $bx_1x_2\dots x_n$, если n - нечётно
18	$a\,b$, если $x_2=a$, $x_1\dots x_{n-1}$, если $x_2=b$
19	$a\lambda a$, если n - нечётно, $x_1x_2\dots x_{n-1}x_nx_n$, если n - чётно
20	a^n, если $x_1=a$, x_2, если $x_1=b$
21	$x_1x_2\dots x_{n-1}$,
22	$ax_2\lambda x_3x_4\dots x_n$
23	$x_1x_nx_2x_3\dots x_{n-1}$
24	$b^nx_1\dots x_n$
25	$(ab)^n$

Таблица 3.1.1(окончание)

№	α
26	$x_1x_2\ldots x_{n-2}x_{n-1}x_{n-1}x_n$
27	x_1, если n - нечётно, x_n, если n - чётно
28	$x_nx_{n-1}\ldots x_1$
29	$x_1x_2\ldots x_{n-2}\lambda x_{n-1}x_n$
30	ab, если слово начинается на ba, $x_1\ldots x_{n-1}$ в других случаях

Пример решения задания 3.1.1

Решить задание 3.1.1 для

$$\alpha = \{x_n,\ \text{если}\ x_{n-1} = a, \qquad b^{n-1}x_n,\ \text{если}\ x_{n-1} = b, \quad (n > 1).$$

1. Опишем работу алгоритма, решающего эту задачу.

Будем обозначать состояния машины Тьюринга числами $0,1,2...$, причём 1 - начальное, а 0 - заключительное состояния.

Вначале с помощью команд $(a,1) \to a\text{П}1$; $(b,1) \to b\text{П}1$ проходим до конца слова, не изменяя его символов.

Признаком окончания слова будет считывание λ в первом состоянии.

С помощью команд $(\lambda,1) \to \lambda\text{Л}2$; $(a,2) \to a\text{Л}3$; $(b,2) \to b\text{Л}3$ движемся влево, не изменяя последнего символа слова.

Если в состоянии 3 считываем символ a, значит, $x_{n-1} = a$, нужно стирать все символы слова α, кроме последнего. Это можно сделать с помощью команд $(a,3) \to \lambda\text{Л}4$; $(a,4) \to \lambda\text{Л}4$; $(b,4) \to \lambda\text{Л}4$. Если в состоянии 4 считывается λ, значит, вся работа проделана, и пора останавливаться с помощью команды $(\lambda,4) \to \lambda\text{Н}0$.

Если в состоянии 3 считываем символ b, значит, $x_{n-1} = b$, нужно все символы, кроме x_n, заменять буквами b. Это делаем с помощью команд $(b,3) \to b\text{Л}5$; $(a,5) \to b\text{Л}5$; $(b,5) \to b\text{Л}5$. Если в состоянии 5 считывается λ, значит, всё символы исходного слова пройдены, можно переходить в состояние 0 с помощью команды $(\lambda,5) \to \lambda\text{Н}0$.

Запишем программу найденной машины Тьюринга в виде таблицы:

Таблица 3.1.1а

A \ S	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
λ	λЛ2	-	-	λН0	λН0
a	*a*П1	*a*Л3	λЛ4	λЛ4	*b*Л5
b	*b*П1	*b*Л3	*b*Л5	λЛ4	*b*Л5

2. Проверим работу построенной машины Тьюринга над словом $abba$:

$abba$, $abba$, $abba$, $abba$, $abba\lambda$, $abba\lambda$, $abba$, $abba$, $abba$,
1 1 1 1 1 2 3 5 5

$\lambda bbba$, $\lambda bbba$.
5 0

Итак, в слове $abba$ предпоследний символ - b, и все буквы исходного слова, кроме последней, заменены буквой b.

Проверим работу построенной машины Тьюринга над словом $bbaaa$:

$bbaaa$, $bbaaa$, $bbaaa$, $bbaaa$, $bbaaa$, $bbaaa\lambda$, $bbaaa$,
1 1 1 1 1 1 2

$bbaaa$, $bba\lambda a$, $bb\lambda\lambda a$, $b\lambda\lambda\lambda a$, $\lambda\lambda\lambda\lambda a$, $\lambda\lambda\lambda\lambda a$.
3 4 4 4 4 0

В слове $bbaaa$ предпоследний символ - a, и все буквы исходного слова, кроме последней, заменены пустыми символами λ.

Итак, проверка сделана, результат работы машины Тьюринга удовлетворяет требованиям, которые ставились в условии задачи.

Задание 3.1.2

1. Построить машину Тьюринга, вычисляющую числовую функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

2. Проверить работу построенной машины над некоторыми наборами значений переменных.

Таблица 3.1.2

№	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
1	$f(x, y, z) = x + y$
2	$f(x, y, z) = y + 3$

Таблица 3.1.2 (продолжение)

№	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
3	$f(x, y) = \{x - y,$ если $x \geq y, \quad 0,$ если $x < y\}$
4	$f(x, y, z, w) = 4$
5	$f(x, y) = \{0,$ если $x \geq y, \quad 1,$ если $x < y\}$
6	$f(x, y, z) = \{z - 3,$ если $z \geq 3, \quad 0,$ если $z < 3\}$
7	$f(x, y, z, w) = y + z + 1$
8	$f(x, y, z) = \{0,$ если $x = 0, \quad y,$ если $x \neq 0\}$
9	$f(x, y) = \{y - x,$ если $x \leq y, \quad 0,$ если $x > y\}$
10	$f(x, y) = \{2,$ если $y > 1, \quad x,$ если $y \leq 1\}$
11	$f(x, y, z) = y + 3 + z$
12	$f(x, y) = \{0,$ если $x \neq 0, \quad y + 1,$ если $x = 0\}$
13	$f(x, y) = \{x,$ если x - чётно; $y,$ если x - нечётно$\}$
14	$f(x, y) = \{x + y,$ если $x \geq y, \quad 0,$ если $x < y\}$
15	$f(x, y, z) = \{z + 1,$ если $z \neq 0, \quad 0,$ если $z = 0\}$
16	$f(x, y) = \{0,$ если x - чётно; 1 если x - нечётно$\}$
17	$f(x, y, z) = 2y$
18	$f(x, y, z) = \{w,$ если $x = 0, \quad 2,$ если $x \neq 0\}$
19	$f(x, y) = \{x - 2,$ если $x \geq 2, \quad 0,$ если $x < 2\}$
20	$f(x, y) = 2x + 1$
21	$f(x, y) = \{x,$ если x - чётно; 0, если x - нечётно$\}$
22	$f(x, y) = \{0,$ если $xy = 0, \quad x + y,$ если $xy \neq 0\}$
23	$f(x, y, z) = y + 3$
24	$f(x, y) = \{1,$ если $x = 0, \quad 0,$ если $x \neq 0\}$
25	$f(x, y, z, w) = z + w$
26	$f(x, y) = \{y,$ если $x = 1, \quad x + 2,$ если $x \neq 1\}$
27	$f(x, y, z) = \{x + y,$ если $z \neq 0; \quad y,$ если $z = 0\}$

Таблица 3.1.2 (окончание)

№	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
28	$f(x, y, z, w) = \{z,$ если $x > 1; \quad w,$ если $x \le 1\}$
29	$f(x, y, z) = 2z$
30	$f(x, y) = \{5,$ если $x + y > 2, \quad 0,$ если $x + y \le 2\}$

Пример решения задания 3.1.2

Решить задание 3.1.2 для $f(x, y) = x + 2y.$

1. Внутренние состояния машины Тьюринга, которую мы требуется построить, будем обозначать числами 0,1,2..., причём 1 - начальное, а 0 - заключительные состояния.

Набор значений аргументов (x, y) изображается словом $1^{x+1}\lambda 1^{y+1}$.

Аргумент x должен остаться без изменения, этого можно добиться с помощью команды (1,1)→1П1. Когда в первом состоянии встретится символ λ, значит, мы попали на символ, разделяющий изображения аргументов, переходим в состояние 2, а сам символ λ пока оставляем без изменений с помощью команды (λ,1)→λП2.

Далее, набор единиц, изображающий аргумент y, проходим до конца. Для этого добавим команды (1,2)→1П2; (λ,2)→λЛ3.

Теперь с помощью “челночного” алгоритма удвоим количество единиц в блоке, изображающем вторую переменную.

Расширим алфавит, введя метку #. Считая, что k единиц блока продублированы, рассмотрим, как будет дублироваться $k+1$-я единица. $1^{x+1}\lambda\overbrace{1\ldots1}^{\text{y+1-k}}\underset{3}{\overbrace{1\ldots1}^{k}}\overbrace{1\ldots1}^{k}$. Заменим очередную единицу из блока, изображающего вторую переменную, меткой # и будем двигаться вправо ((1,3)→#П4; (1,4)→1П4) пока не встретим пустую ячейку, заполним её единицей, и пойдём влево ((λ,4)→1Л5; (1,5)→1Л5), пока не встретим метку, заменим её единицей, перейдём к следующему символу слева, вернувшись в состояние 3 ((#,5)→1Л3).

Когда в третьем состоянии считается λ, значит, блок, изображающий вторую переменную, продублирован. Заменим разделяющий символ единицей ((λ,3)→1Л5) и пойдём на начало полученного блока из $x+1+1+2(y+1)=x+2y+4$ единиц. Когда в состоянии 5 встретится λ, значит, пора идти вправо, стирать три лишние единицы, ведь для изображения числа $x+2y$ требуется $x+2y+1$ единиц. Для этого добавим команды (λ,5)→λП6; (1,6)→λП7; (1,7)→λП8; (1,8)→λН0 .

Запишем все команды полученной машины Тьюринга в виде таблицы:

Таблица 3.1.2а

A \ S	1	2	3	4	5	6	7	8
λ	λП2	λЛ3	1Л5	1Л5	λП6	-	-	-
1	1П1	1П2	#П4	1П4	1Л5	λП7	λП8	λН0
#	-	-	-	-	1Л3	-	-	-

В клетках таблицы, помеченных неопределённым символом - можно вписать любые команды, т.к. до их исполнения дело всё равно не дойдёт.

2. Проверим работу алгоритма над изображением набора переменных (0,1), т.е. над словом 1λ11:

1λ11,	1λ11,	1λ11,	1λ11,	1λ11λ,	1λ11λ,	1λ1#λ,	1λ1#1,
1	1	2	2	2	3	4	5

1λ111,	1λ#11,	1λ#11,	1λ#11λ,	1λ#111,	1λ#111,	1λ#111,
3	4	4	4	5	5	5

1λ1111,	11^5,	$\lambda 1^6$,	$\lambda 11^5$,	$\lambda 11^4$,	$\lambda 11^3$,	λλ111.
3	5	5	6	7	8	0

Итак, в результате осталось три единицы, которые являются изображением числа 2.

Заметим, что $f(0,1)=0+2\cdot 1=2,$ так что на ленте получено то, что и нужно было получить.

Задание 3.1.3

1. Написать формулу числовой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, вычислимой машиной Тьюринга с множеством внутренних состояний $\{0,1,2,3,4,5,6\}$, где 0 - заключительное, а 1 - начальные состояния, если машина задана своей программой.

2. Проверить работу машины Тьюринга с некоторым набором значений аргументов.

Таблица 3.1.3

№	*n*	*A**S*	1	2	3	4	5	6
1	4	**λ**	1П2	1П3	λП4	λЛ5	λЛ5	λН0
		1	λП1	1П2	1П3	λП4	λЛ6	λЛ0
2	2	**λ**	---	1П5	λП4	λН0	---	λН0
		1	1П2	λП3	λП3	λП4	1П6	λП6
3	3	**λ**	λП2	λП3	λЛ4	1Н0	1Л6	1Л4
		1	λП1	λП2	1П3	λП5	1П5	1Л6
4	2	**λ**	1П4	λЛ3	λН0	1Л5	1П6	1Н0
		1	1П2	1П1	λЛ3	1П4	1Л5	1П6
5	3	**λ**	---	1П3	λП4	λЛ5	λЛ5	1Н0
		1	λП2	λП2	1П3	1Л6	1Л6	1Л6
6	4	**λ**	λП2	1П3	λП4	λЛ5	λЛ5	---
		1	λП1	1П2	1П3	λП4	λЛ6	λН0
7	2	**λ**	λП4	1П3	1П1	λЛ5	λЛ5	λН0
		1	λЛ2	1Л2	1П3	λП4	λЛ6	1Л6
8	3	**λ**	1П2	1П3	1П4	λЛ5	λЛ6	λЛ6
		1	1П1	λП2	1П3	---	λЛ5	1Н0
9	3	**λ**	1П2	1П3	λЛ4	λЛ4	1Л6	1Л0
		1	λП1	1П2	λП3	λЛ5	1Л5	---

10	4	**λ**	λП2	λП3	λП4	λЛ5	λЛ5	1Н0
		1	λП1	λП2	1П3	λП4	λЛ6	1Л6

Таблица 3.1.3 (продолжение)

№	*n*	*A* \ *S*	1	2	3	4	5	6
11	2	**λ**	λП2	1Н0	1П5	1Н0	1Л6	1Н0
		1	λП1	1П3	1П4	1П4	1Л5	1Л6
12	4	**λ**	λП2	1П3	1Л4	1П5	1Л6	1Н0
		1	λП1	λП2	1П3	1Л4	1П5	1Л6
13	2	**λ**	1П4	1П3	1П1	1П5	1П6	λН0
		1	λЛ2	1Л2	1П3	1П4	---	1Н0
14	4	**λ**	λН0	λП3	1П4	1П5	---	1Л1
		1	1Н2	λП2	λП3	1П4	1Л6	1Л6
15	2	**λ**	1П2	λЛ3	1П6	1Л5	1Л3	1Н0
		1	1П1	1П2	λП4	1П4	1Л5	1П6
16	4	**λ**	1П2	λП3	λП4	λЛ5	λЛ5	1Н0
		1	1П1	λП2	λП3	λП4	1Л6	1Л6
17	4	**λ**	λП2	λП3	λП4	λЛ5	λЛ5	1Н0
		1	1П1	λП2	λП3	λП4	1Н6	1Л6
18	3	**λ**	1П2	1П3	λЛ4	λН0	1Л6	1Л4
		1	1П1	1П2	1П3	λП5	1П5	1Л6
19	3	**λ**	1П2	1П3	λЛ4	λЛ4	1П6	1Н0
		1	λП1	1П2	λП3	1Л5	1Л5	1П6
20	1	**λ**	1П1	1Н0	1П5	λН0	1П6	1Н0
		1	1П2	1П3	1П4	λП4	λЛ0	---
21	4	**λ**	---	1П3	λП4	λП5	λЛ6	λЛ6
		1	λП2	1П2	1П3	λП4	λП5	λН0
		λ	1П2	1П3	1Л4	1Л5	λЛ5	λН0

22	4	**1**	1П1	λП2	1П3	1Л4	1Н6	λЛ6
23	2	λ	1Н0	λП5	1П4	1Н0	1П6	1П1
		1	λП2	1П3	1П3	1П4	λП5	1П6

Таблица 3.1.3 (окончание)

№	n	$A \backslash S$	1	2	3	4	5	6
24	5	λ	λП2	1П3	1П4	1П5	λЛ6	λЛ6
		1	λП1	λП2	1П3	1П4	λП5	λН0
25	2	λ	1П2	λН0	1П4	1П2	1П6	1Н0
		1	λП1	λЛ3	1Л3	1П4	1Л6	1Н0
26	3	λ	1П2	λП3	---	1Л5	1Н0	1Н0
		1	1П1	1П2	1П4	1Л6	1Л5	1Л6
27	2	λ	1П2	---	1Н0	1Л5	1П6	1П3
		1	1П1	1П3	1П4	1П4	1Л5	1П6
28	3	λ	1П2	1Л3	1П4	1Л5	1П6	λН0
		1	1Л1	1П2	1Л3	1П4	1Л5	1П6
29	3	λ	λП2	---	λП4	λЛ5	λЛ5	1Н0
		1	λП1	λП3	1П3	λП4	λЛ6	1Л6
30	2	λ	1П2	λЛ5	λЛ4	1Н0	1Л6	1П0
		1	1П1	1П3	1П2	λЛ4	1Л5	λЛ6

Пример решения задания 3.1.3

Решить задание 3.1.3 для $f(x_1, x_2)$, *вычислимой на машине Тьюринга, заданной своей программой:*

Таблица 3.1.3а

$A \backslash S$	1	2	3	4	5	6
λ	---	λП5	1Л4	1Н0	λН6	1Н0
1	λП2	1П3	1П3	1Л4	λП5	---

Рассмотрим последовательность конфигураций данной машины Тьюринга при работе над изображением набора значений аргументов (x_1, x_2).

Рассмотрим случаи: 1) $x_1 \neq 0$.

$$\underset{1}{1}1^{x_1}\lambda 1^{x_2+1},\ \lambda \underset{2}{1}1^{x_1-1}\lambda 1^{x_2+1},\ 1\underset{3}{1}1^{x_1-2}\lambda 1^{x_2+1},\ \ldots,1^{x_1}\underset{3}{\lambda}1^{x_2+1},$$

$$1^{x_1-1}\underset{4}{1}11^{x_2+1},\ \ldots,\underset{4}{\lambda}1^{x_1+x_2+2},\ \underset{0}{1}1^{x_1+x_2+2}.$$

Итак, в результате работы машины Тьюринга над изображением набора аргументов получился блок из $x_1 + x_2 + 3$ единиц, которые служат изображением числа $x_1 + x_2 + 2$.

2) $x_1 = 0$.

В этом случае последовательность конфигураций будет выглядеть так:

$$\underset{1}{1}\lambda 1^{x_2+1},\ \lambda\underset{2}{\lambda}1^{x_2+1},\ \lambda\underset{5}{1}1^{x_2},\ \lambda\underset{5}{1}1^{x_2-1},\ \ldots,\underset{5}{1},\ \underset{5}{\lambda},\ \underset{6}{\lambda},\ \underset{0}{1}.$$

В этом случае осталась одна единица, которая служит изображением числа 0.

Ответ: $f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 + 2, & \text{если } x_1 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x_1 = 0. \end{cases}$

Задание 3.1.4

1. По данному коду $N(T)$ восстановить программу машины Тьюринга.

2. Выяснить, является ли машина T самоприменимой или несамоприменимой.

При составлении $N(T)$ использована следующая кодировка:

П - 1, Л - 1^2, Н - 1^3, λ - 1^4, 1 - 1^5, $*$ - 1^6,

s_0 - 1^7, s_1 - 1^8, s_2 - 1^9.

Таблица 3.1.4

№	$N(T)$
1	$1^8*1^4*1^5*1*1^9**1^8*1^5*1^6*1*1^8**1^8*1^6*1^4*1^2*1^8**$ $1^9*1^4*1^4*1^3*1^9**1^9*1^5*1^5*1*1^9**1^9*1^6*1^4*1*1^8$
2	$1^8*1^4*1^4*1*1^7**1^8*1^5*1^6*1*1^9**1^8*1^6*1^5*1^2*1^9**$ $1^9*1^4*1^4*1*1^8**1^9*1^5*1^5*1*1^8**1^9*1^6*1^5*1*1^9$
3	$1^8*1^4*1^4*1*1^8**1^8*1^5*1^6*1^2*1^7**1^8*1^6*1^5*1^3*1^7**$ $1^9*1^4*1^4*1^3*1^7**1^9*1^5*1^6*1*1^9**1^9*1^6*1^6*1*1^8$
4	$1^8*1^4*1^4*1^2*1^9**1^8*1^5*1^6*1^2*1^8**1^8*1^6*1^5*1^3*1^8**$ $1^9*1^4*1^4*1*1^9**1^9*1^5*1^6*1^2*1^8**1^9*1^6*1^4*1*1^8$
5	$1^8*1^4*1^4*1^2*1^7**1^8*1^5*1^6*1^2*1^9**1^8*1^6*1^6*1^3*1^9**$ $1^9*1^4*1^4*1^2*1^8**1^9*1^5*1^5*1^2*1^7**1^9*1^6*1^5*1*1^9$
6	$1^8*1^4*1^4*1^2*1^8**1^8*1^5*1^4*1^3*1^7**1^8*1^6*1^6*1*1^7**$ $1^9*1^4*1^4*1*1^7**1^9*1^5*1^5*1^3*1^9**1^9*1^6*1^6*1*1^8$
7	$1^8*1^4*1^4*1^3*1^9**1^8*1^5*1^4*1^3*1^8**1^8*1^6*1^6*1*1^8**$ $1^9*1^4*1^4*1^2*1^9**1^9*1^5*1^6*1^2*1^8**1^9*1^6*1^4*1*1^8$
8	$1^8*1^4*1^4*1^3*1^7**1^8*1^5*1^5*1^3*1^9**1^8*1^6*1^6*1*1^9**$ $1^9*1^4*1^4*1*1^8**1^9*1^5*1^6*1^3*1^9**1^9*1^6*1^5*1*1^8$
9	$1^8*1^4*1^4*1^3*1^8**1^8*1^5*1^4*1*1^7**1^8*1^6*1^6*1^2*1^7**$ $1^9*1^4*1^4*1*1^7**1^9*1^5*1^4*1*1^8**1^9*1^6*1^6*1*1^9$
10	$1^8*1^4*1^4*1*1^9**1^8*1^5*1^4*1*1^8**1^8*1^6*1^6*1^2*1^8**$ $1^9*1^4*1^4*1^2*1^8**1^9*1^5*1^5*1^3*1^7**1^9*1^6*1^4*1*1^9$
11	$1^8*1^4*1^5*1*1^7**1^8*1^5*1^4*1*1^9**1^8*1^6*1^6*1^2*1^9**$ $1^9*1^4*1^4*1^2*1^9**1^9*1^5*1^6*1*1^9**1^9*1^6*1^5*1^2*1^7$
12	$1^8*1^4*1^5*1*1^8**1^8*1^5*1^4*1^3*1^7**1^8*1^6*1^6*1^3*1^7**$ $1^9*1^4*1^6*1^2*1^7**1^9*1^5*1^4*1*1^9**1^9*1^6*1^6*1^2*1^8$

13	$1^8*1^4*1^5*1^2*1^9**1^8*1^5*1^4*1^2*1^8**1^8*1^6*1^6*1^3*1^8**$ $1^9*1^4*1^6*1^3*1^8**1^9*1^5*1^5*1^2*1^8**1^9*1^6*1^4*1^2*1^8$
14	$1^8*1^4*1^5*1^2*1^7**1^8*1^5*1^4*1^2*1^9**1^8*1^6*1^4*1^3*1^9**$ $1^9*1^4*1^6*1^3*1^9**1^9*1^5*1^6*1^2*1^8**1^9*1^6*1^5*1^2*1^8$
15	$1^8*1^4*1^5*1^2*1^8**1^8*1^5*1^4*1^2*1^7**1^8*1^6*1^4*1*1^7**$ $1^9*1^4*1^6*1^3*1^7**1^9*1^5*1^4*1^3*1^7**1^9*1^6*1^6*1^2*1^8$

Таблица 3.1.4 (окончание)

№	$N(T)$
16	$1^8*1^4*1^5*1^3*1^9**1^8*1^5*1^4*1^2*1^8**1^8*1^6*1^4*1*1^8**$ $1^9*1^4*1^6*1*1^9**1^9*1^5*1^4*1^2*1^9**1^9*1^6*1^4*1^2*1^9$
17	$1^8*1^4*1^5*1^3*1^7**1^8*1^5*1^4*1^3*1^9**1^8*1^6*1^4*1*1^9**$ $1^9*1^4*1^6*1*1^8**1^9*1^5*1^5*1^3*1^9**1^9*1^6*1^5*1^2*1^9$
18	$1^8*1^4*1^5*1^3*1^8**1^8*1^5*1^5*1^3*1^7**1^8*1^6*1^4*1^2*1^7**$ $1^9*1^4*1^6*1*1^7**1^9*1^5*1^6*1^3*1^8**1^9*1^6*1^6*1^2*1^7$
19	$1^8*1^4*1^5*1*1^9**1^8*1^5*1^5*1^3*1^8**1^8*1^6*1^4*1^2*1^8**$ $1^9*1^4*1^6*1^2*1^9**1^9*1^5*1^4*1^1*1^8**1^9*1^6*1^4*1^2*1^9$
20	$1^8*1^4*1^6*1*1^7**1^8*1^5*1^5*1^3*1^9**1^8*1^6*1^4*1^2*1^9**$ $1^9*1^4*1^6*1^2*1^8**1^9*1^5*1^4*1^2*1^7**1^9*1^6*1^5*1*1^9$
21	$1^8*1^4*1^6*1*1^8**1^8*1^5*1^5*1*1^7**1^8*1^6*1^4*1^3*1^7**$ $1^9*1^4*1^5*1^2*1^7**1^9*1^5*1^5*1^2*1^9**1^9*1^6*1^6*1*1^8$
22	$1^8*1^4*1^6*1^2*1^9**1^8*1^5*1^5*1*1^8**1^8*1^6*1^4*1^3*1^8**$ $1^9*1^4*1^5*1^3*1^9**1^9*1^5*1^6*1*1^8**1^9*1^6*1^4*1*1^9$
23	$1^8*1^4*1^6*1^2*1^7**1^8*1^5*1^5*1*1^9**1^8*1^6*1^5*1^3*1^9**$ $1^9*1^4*1^5*1^3*1^8**1^9*1^5*1^6*1^2*1^9**1^9*1^6*1^5*1*1^7$
24	$1^8*1^4*1^6*1^2*1^8**1^8*1^5*1^5*1^2*1^7**1^8*1^6*1^5*1*1^7**$ $1^9*1^4*1^5*1^3*1^7**1^9*1^5*1^5*1^2*1^9**1^9*1^6*1^6*1*1^9$
25	$1^8*1^4*1^6*1^2*1^9**1^8*1^5*1^5*1^2*1^8**1^8*1^6*1^5*1*1^8**$ $1^9*1^4*1^5*1*1^9**1^9*1^5*1^6*1^3*1^8**1^9*1^6*1^4*1^2*1^9$
26	$1^8*1^4*1^6*1^3*1^7**1^8*1^5*1^5*1^2*1^9**1^8*1^6*1^5*1*1^9**$ $1^9*1^4*1^5*1*1^8**1^9*1^5*1^4*1^3*1^8**1^9*1^6*1^5*1^3*1^8$

27	$1^8*1^4*1^6*1^3*1^8**1^8*1^5*1^6*1^3*1^7**1^8*1^6*1^5*1^2*1^7**$ $1^9*1^4*1^5*1*1^7**1^9*1^5*1^5*1*1^8**1^9*1^6*1^6*1^3*1^7$
28	$1^8*1^4*1^6*1*1^9**1^8*1^5*1^6*1^3*1^8**1^8*1^6*1^5*1^2*1^8**$ $1^9*1^4*1^5*1^2*1^9**1^9*1^5*1^6*1^3*1^7**1^9*1^6*1^4*1^3*1^8$
29	$1^8*1^4*1^5*1*1^7**1^8*1^5*1^6*1^3*1^9**1^8*1^6*1^5*1^2*1^9**$ $1^9*1^4*1^5*1^3*1^8**1^9*1^5*1^5*1*1^9**1^9*1^6*1^5*1*1^8$
30	$1^8*1^4*1^4*1*1^8**1^8*1^5*1^6*1*1^7**1^8*1^6*1^5*1^3*1^7**$ $1^9*1^4*1^4*1^2*1^7**1^9*1^5*1^4*1*1^8**1^9*1^6*1^6*1^2*1^7$

Пример решения задания 3.1.4

Решить задание 3.1.4 для данного кода $N(T)$:

$N(T) = 1^8*1^4*1^4*1*1^8**1^8*1^5*1^5*1*1^8**1^8*1^6*1^6*1^2*1^9**$
$1^9*1^4*1^5*1^3*1^7**1^9*1^5*1^4*1^2*1^9**1^9*1^6*1^5*1*1^8$.

1. Заменим каждый блок единиц символом по описанному в условии задачи правилу. Одной звёздочкой разделяются символы одной команды, а двумя звёздочками - отдельные команды машины Тьюринга.

Например, комбинации $1^8*1^4*1^4*1*1^8$ соответствует команда $(\lambda, s_1) \to \lambda П s_1$. Заменяя таким образом коды всех команд их стандартной записью, изобразим программу машины Тьюринга в виде таблицы :

Таблица 3.1.4а

A \ S	s_1	s_2
λ	s_1 λ П	1 Н s_0
1	1 П s_1	λ Л s_2
*	* Л s_2	1 П s_1

2. Запишем последовательность конфигураций машины Тьюринга при работе над своим кодом, обозначив через A слово, полученное из кода машины Тьюринга, начиная с10-го символа.

$$\underset{s_1}{1}\,1^7*A,\quad 1\,\underset{s_1}{1}\,1^6*A,\ \ldots\ 1^8\underset{s_1}{*}A,\quad 1^7\,\underset{s_2}{1}*A,\quad 1^6\,\underset{s_2}{1}\,\lambda*A,\ \ldots,$$

$$\underset{s_2}{1}\,\lambda^7 * A,\quad \underset{s_2}{\lambda}\,\lambda^8 * A,\quad \underset{s_0}{1}\,\lambda^8 * A.$$

Как видим, при работе над своим кодом машина Тьюринга перешла в своё заключительное состояние, значит, она является самоприменимой.

3.2. Нормальные алгоритмы

Пусть A - алфавит, не содержащий символов " **.** " и " $\to$ ".

Обыкновенной формулой подстановок называется запись вида $P \to Q,$ где P и Q - некоторые слова в алфавите A.

Заключительной формулой подстановок называется запись вида $P \to .Q,$ где P и Q - некоторые слова в алфавите A.

Нормальной схемой подстановок над алфавитом A называется запись вида $\begin{cases} P_1 \to d_1 Q_1 \\ P_2 \to d_2 Q_2 \\ \quad \dots \\ P_k \to d_k Q_k \end{cases}$, где P_i, Q_i - слова в алфавите A, d_i - либо пустое место, либо символ " **.** ".

Нормальным алгоритмом над алфавитом B называется пара (A, S) такая, что $B \subseteq A$, S - нормальная схема над алфавитом B.

Работа нормального алгоритма над словом R состоит из отдельных шагов, в результате которых получаются слова $R = R_1, R_2, \dots, R_i, \dots$ Слово R_{i+1} получается из слова R_i так:

просматривается нормальная схема подстановок и из неё выбирается самая верхняя формула, левая часть которой входит в слово R_i. Пусть, например, это будет формула $P_j \to d_j Q_j$. Затем первое вхождение P_j в слово R_i заменяется на Q_j, что и даёт слово R_{i+1}.

Работа нормального алгоритма над словом R заканчивается в двух случаях:

1) существует i такое, что слово R_i получено с помощью заключительной формулы подстановки;

2) существует i такое, что ни одна из левых частей нормальной схемы подстановок не входит в слово R_i.

И в том, и в другом случаях слово R_i объявляется *результатом* работы нормального алгоритма над словом R и говорят, что нормальный алгоритм *применим* к слову R.

Изображением набора аргументов $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ называется запись вида $1^{x_1+1} * 1^{x_2+1} * 1^{x_3+1} * \ldots * 1^{x_k+1}$, (*) где $1^z = \underbrace{11\ldots1}_{z}$.

Числовая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ называется *вычислимой по Маркову*, если существует нормальный алгоритм, применимый к любому слову вида (*), переводящий его в слово 1^{y+1}, где $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

Задание 3.2.1

1. Построить нормальный алгоритм, применимый ко всем словам $x_1 x_2 \ldots x_n$ в алфавите $\{a, b\}$ и переводящий их в слово α

2. Проверить работу построенного нормального алгоритма над некоторыми словами.

Таблица 3.2.1

№	α
1	ab, если $n \le 3$, $ax_1 x_2 \ldots x_n$, если $n > 3$
2	aa, если в данном слове число букв b нечётно, $x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$, если чётно
3	$x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n x_n$, если $x_2 = a$, $x_1 x_2 \ldots x_n b$, если $x_2 = b$
4	abb, если слово начинается на ab, $x_1 x_2$ в остальных случаях
5	$x_1 \ldots x_n b$, если n - чётно, $b x_1 \ldots x_n$, если n - нечётно
6	ab, если $x_2 = a$, $x_1 \ldots x_{n-1}$, если $x_2 = b$
7	$a * a$, если n - нечётно, $x_1 \ldots x_{n-1} x_n x_n$, если n - чётно

8	a^n, если $x_1 = a$, x_2, если $x_1 = b$
9	$x_1 \ldots x_n a^n$
10	$ax_2 * x_1 * x_3 * \ldots * x_n$
11	$x_1 x_n x_2 x_3 \ldots x_{n-1} x_n$

Таблица 3.2.1(окончание)

№	α
12	$b^n x_1 \ldots x_n$
13	$(ab)^n$
14	$x_1 x_2 \ldots x_n * x_{n-1} * x_{n-2}$
15	$x_1 * * x_3 \ldots x_{n-1}$, если $x_2 = a$, $x_3 x_4 \ldots x_n$, если $x_2 = b$
16	$x_1 \ldots x_n$, если в исходном слове количество букв a нечётно, aba, если чётно
17	$x_1 * x_3 * x_5 * \ldots * x_n$, если n нечётно, $x_1 x_2 \ldots x_n$, если n чётно
18	$x_1 a x_2 b x_3 a x_4 b \ldots x_n$
19	$x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-1} x_n x_{n-1} \ldots x_1$
20	$baba$, если слово начинается на ba, $x_1 x_2 \ldots x_n a$ в других случаях
21	$bx_1 x_2 \ldots x_n$, если $x_n = a$, bbb, если $x_n = b$
22	ab, если n - нечётно, $x_{n-1} x_n$, если n - чётно
23	a^n, если $x_{n-1} = a$, $x_1 x_2 \ldots x_{n-2} ab$, если $x_{n-1} = b$
24	$x_1 x_3 x_2 x_4 x_5 \ldots x_{n-2} x_n x_{n-1}$
25	$ax_1 x_1 x_2 x_2 \ldots x_{n-2} x_{n-2} b$
26	bb, если $n \le 3$, $x_1 \ldots x_{n-1}$, если $n > 3$
27	$x_1 x_2 \ldots x_n a$, если n - нечётно, $bx_1 \ldots x_n$, если n - чётно
28	$b^n x_1 \ldots x_n$
29	$x_2 * x_1 * x_2 * x_1$
30	$x_n x_{n-1} \ldots x_2 x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-1} x_n$

Пример решения задания 3.2.1

Решить задание 3.2.1 для

$$\alpha = \{x_n,\ \text{если}\ x_{n-1} = a; \qquad b^{n-1}x_n,\ \text{если}\ x_{n-1} = b\}, \quad (n > 1).$$

1. Опишем работу нормального алгоритма, решающего эту задачу.

Последней в схеме подстановок запишем формулу $\to \alpha$, тогда слово $x_1 x_2 \ldots x_n$ перейдёт в $\alpha x_1 x_2 \ldots x_n$. Затем с помощью формул подстановок $\alpha a \to a\alpha,\ \alpha b \to b\alpha$ символ α прейдёт на конец слова: $x_1 x_2 \ldots x_n \alpha$.

Для разбора варианта $x_{n-1} = a$ введём формулы подстановок $ab\alpha \to \beta b,\ \ aa\alpha \to \beta a,\ \ a\beta \to \beta,\ \ \beta \to .$

Для разбора случая $x_{n-1} = b$ введём формулы подстановок $bb\alpha \to \gamma bb,\ \ ba\alpha \to \gamma ba,\ \ a\gamma \to \gamma b,\ \ b\gamma \to \gamma b,\ \ \gamma \to .$

Запишем нормальную схему подстановок:

$$\begin{cases} \alpha a \to a\alpha \\ \alpha b \to b\alpha \\ ab\alpha \to \beta b \\ aa\alpha \to \beta a \\ a\beta \to \beta \\ \beta \to . \\ bb\alpha \to \gamma bb \\ ba\alpha \to \gamma ba \\ a\gamma \to \gamma b \\ b\gamma \to \gamma b \\ \gamma \to . \\ \to \alpha \end{cases}$$

2. Проверим работу построенного нормального алгоритма на словами $abba$ и $bbaaa$:

$\underline{\ }abba,\ \underline{\alpha a}bba,\ a\underline{\alpha b}ba,\ ab\underline{\alpha b}a,\ abb\underline{\alpha a},\ ab\underline{ba\alpha},$

$ab\underline{\gamma}ba,\ \underline{a\gamma}bba,\ \underline{\gamma}bbba,\ bbba.$

$\underline{\ }bbaaa,\ \underline{\alpha}bbaaa,\ b\underline{\alpha b}aaa,\ bb\underline{\alpha a}aa,\ bba\underline{\alpha a}a,\ bbaa\underline{\alpha}a,$

$bba\underline{aa\alpha},\ bb\underline{a\beta}a,\ b\underline{b\beta}a,\ \underline{b\beta}a,\ \underline{\beta}a,\ a.$

Видим, что нормальный алгоритм работает так, как и требовалось.

Задание 3.2.2

1. Построить нормальный алгоритм, вычисляющий данную числовую функцию f.

2. Проверить работу построенного нормального алгоритма над некоторыми наборами значений переменных.

Таблица 3.2.2

№	f
1	$f(x,y,z)=2x+z$
2	$f(x,y)=\{y-x,$ если $y\ge x;\quad 0,$ если $y<x\}$
3	$f(x,y,z,w)=\{4,$ если x - чётно; $x,$ если x нечётно $\}$

Таблица 3.2.2(окончание)

№	f
4	$f(x,y)=\{1,$ если $x>y;\quad 0,$ если $x\le y\}$
5	$f(x,y,z)=\{z$ - $3,$ если $z\ge 3;\quad 0,$ если $z<3\}$
6	$f(x,y,z,w)=x+3y+3w$
7	$f(x,y,z)=\{0,$ если $x=0;\quad y,$ если $x\ne 0\}$
8	$f(x,y)=\{x-y,$ если $x\ge y;\quad 1,$ если $x<y\}$
9	$f(x,y,z)=\{3,$ если $y>1;\quad x,$ если $y\le 1\}$
10	$f(x,y,z)=y+z+4$
11	$f(x,y,z)=\{0,$ если $x\ne 0;\quad y+1,$ если $x=0\}$
12	$f(x,y)=\{x,$ если x - чётно; $2y,$ если x - нечётно$\}$
13	$f(x,y,z)=\{x+y,$ если $x\ge y;\quad 0,$ если $x<y\}$
14	$f(x,y,z)=\{z+1,$ если $z\ne 0;\quad 0,$ если $z=0\}$
15	$f(x,y)=\{0,$ если x - чётно; $2,$ если x - нечётно$\}$
16	$f(x,y,z)=3y+z$
17	$f(x,y,z,w)=\{w,$ если $x=0;\quad 2,$ если $x\ne 0\}$
18	$f(x,y)=\{x-2,$ если $x\ge 2;\quad 0,$ если $x<2\}$
19	$f(x,y)=4x+1$
20	$f(x,y)=\{x,$ если x - чётно; $0,$ если x - нечётно$\}$
21	$f(x,y)=\{0,$ если $xy=0;\quad x+y,$ если $xy\ne 0\}$
22	$f(x,y,z)=\{y+2,$ если $y>1;\quad 0,$ если $y\le 1\}$
23	$f(x,y)=\{1,\ x=1;\quad 0,$ если $x\ne 1\}$
24	$f(x,y,z,w)=2y+w$
25	$f(x,y,z)=min\{x,y\}$
26	$f(x,y,z)=\{z-2,$ если $z\ge 2;\quad 0,$ если $z<2\}$
27	$f(x,y)=\{y-x,$ если $y>x;\quad 2,$ если $y\le x\}$

28	$f(x,y,z,w) = x + y + [w/2]$
29	$f(x,y,z) = \{1,$ если z - чётно; $2x + y,$ если z - нечётно$\}$
30	$f(x,y,z,w) = x + 2y + 3z + 4$

Пример решения задания 3.2.2

Решить задание 3.2.2 для $f(x,y) = x + 2y$.

Вначале мы имеем запись изображения набора аргументов $1^{x+1} * 1^{y+1}$.

Последней формулой подстановки мы введём символ α: $\to \alpha$. Получим слово $\alpha 1^{x+1} * 1^{y+1}$.

Затем с помощью подстановки $\alpha 1 \to 1\alpha$ оно преобразуется в слово $1^{x+1}\alpha * 1^{y+1}$. Сотрём α и разделительную звёздочку: $\alpha * \to \beta$.

Удвоим количество единиц в блоке, изображающем второй аргумент: $\beta 1 \to 11\beta$. После выполнения всех перечисленных выше подстановок окажется запись, содержащая $x + 1 + 2(y+1) = x + 2y + 3$ единицы. Сотрём лишние две единицы и закончим работу подстановкой $11\beta \to$**.**

Запишем нормальную схему подстановок: $\begin{cases} \alpha 1 \to 1\alpha \\ \alpha * \to \beta \\ \beta 1 \to 11\beta \\ 11\beta \to . \\ \to \alpha \end{cases}$

2. Проверим работу алгоритма над изображением набора переменных (0,1), т.е. над словом 1∗11:

$\underline{\ }1*11$, $\alpha\underline{1}*11$, $1\alpha\underline{*}11$, $1\beta\underline{1}1$, $111\beta\underline{1}$, $111\underline{11}\beta$, 111.

Итак, осталось три единицы, которые являются изображением числа 2, что и ожидалось, т.к. $f(0,1) = 0 + 2 \cdot 1 = 2$.

Задание 3.2.3

1. Написать формулу для функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, вычисляемой нормальным алгоритмом.

2. Проверить работу алгоритма над некоторым набором значений аргументов.

Таблица 3.2.3

№	n	f	**№**	n	f
1	3	$\begin{cases} * \to 11 \\ \alpha 11 \to 1\alpha \\ \alpha 1 \to \alpha \\ \alpha \to . \\ \to \alpha \end{cases}$	**2**	2	$\begin{cases} \alpha 1 \to 1\alpha \\ \alpha * \to \beta \\ \beta 1 \to \gamma \\ \gamma 1 \to \gamma \\ \gamma \to . \\ \to \alpha \end{cases}$
3	2	$\begin{cases} 1*1 \to ** \\ 1** \to ** \\ ** \to .1111 \end{cases}$	**4**	2	$\begin{cases} \alpha 1 \to 11\alpha \\ \alpha * \to 1\beta \\ \beta 11 \to . \\ \beta 1 \to .1111 \\ \to \alpha \end{cases}$
5	3	$\begin{cases} \alpha 1 \to \alpha \\ \alpha * \to \beta \\ \beta 1 \to 11\beta \\ \beta * \to \alpha \\ \alpha \to .111 \\ \to \alpha \end{cases}$	**6**	3	$\begin{cases} 1*1 \to 1* \\ 1** \to \alpha \\ \alpha 1 \to 11\alpha \\ \alpha \to . \end{cases}$
7	2	$\begin{cases} 1*1 \to * \\ *1 \to \beta \\ * \to .1 \\ \beta 1 \to \beta \\ \beta \to .1 \end{cases}$	**8**	2	$\begin{cases} *1 \to ** \\ ** \to \\ 1* \to \beta \\ 1\beta \to \beta 111 \\ \beta \to .1 \\ 1 \to .1 \end{cases}$

9	3	$\begin{cases} *1 \to 1* \\ **1 \to ** \\ ** \to .111 \end{cases}$	**10**	3	$\begin{cases} 1**1 \to ** \\ ***1 \to *** \\ *** \to .1 \\ **1 \to \alpha \\ \alpha 1 \to \alpha \\ \alpha * \to . \\ * \to ** \end{cases}$

Таблица 3.2.3(продолжение)

№	n	f	№	n	f
11	4	$\begin{cases} \alpha 1 \to \alpha \\ \alpha * \to \beta \\ \beta 1 \to 1\beta \\ \beta * \to \gamma \\ \gamma * \to \gamma \\ \gamma 1 \to \gamma \\ \gamma \to . \\ \to \alpha \end{cases}$	**12**	3	$\begin{cases} \alpha 11 \to \beta \\ \alpha 1 \to \gamma \\ \beta 1 \to \beta \\ \beta * \to \beta \\ \beta \to .1 \\ \gamma 1 \to 1\gamma \\ \gamma * \to \gamma \\ \gamma \to .11 \\ \to \alpha \end{cases}$
13	3	$\begin{cases} 1*1 \to 1* \\ ** \to \alpha \\ \alpha 11 \to 1\alpha \\ \alpha 1 \to . \\ \alpha \to . \end{cases}$	**14**	3	$\begin{cases} 11\alpha \to 1\alpha \\ 1\alpha 1 \to 1\gamma \\ \gamma 1 \to 1\gamma \\ \gamma * \to . \\ \alpha 1 \to \beta \\ \beta 1 \to \beta \\ \beta * \to .11 \\ 1* \to \alpha \end{cases}$

15	3	$\begin{cases} \alpha 1 \to 1\alpha \\ \alpha \ast \to \beta \\ \beta 1 \to 111\beta \\ \beta \ast \to \gamma \\ \gamma 1 \to \gamma \\ \gamma \to . \\ \to \alpha \end{cases}$	**16**	2	$\begin{cases} \alpha 1 \to 1\alpha \\ \alpha \ast 11 \to \beta \\ \alpha \ast 1 \to \gamma \\ \gamma \to . \\ 1\beta \to \beta \\ \beta \to . \\ \to \alpha \end{cases}$
17	3	$\begin{cases} \alpha 11 \to 11\beta \\ \beta 1 \to 1\beta \\ \beta \ast \to \beta \\ \beta \to . \\ \alpha 1 \to \gamma \\ \gamma 1 \to \gamma \\ \gamma \ast \to \gamma \\ \gamma \to .11 \\ \to \alpha \end{cases}$	**18**	2	$\begin{cases} \alpha 1 \to 111\alpha \\ \alpha \ast \to \beta \\ \beta 1 \to 11\beta \\ \beta \to .111 \\ \to \alpha \end{cases}$

Таблица 3.2.3(продолжение)

№	n	f	№	n	f
19	3	$\begin{cases} \alpha 1 \to \alpha \\ \alpha \ast 1 \to \beta \\ \beta 111 \to 1\beta \\ \beta 11 \ast \to .11 \\ \beta 1 \ast \to .1 \\ \beta \ast \to . \\ \to \alpha \end{cases}$	**20**	2	$\begin{cases} \alpha 1 \to 1\alpha \\ \alpha \ast \to \beta \\ \beta 1 \to 111\beta \\ \beta \to .11 \\ \to \alpha \end{cases}$
21	2	$\begin{cases} \alpha\alpha 1 \to \alpha\alpha \\ \alpha\alpha \ast \to \alpha\alpha \\ \alpha\alpha \to .11 \\ \alpha 11 \to \beta \\ \beta 1 \to \beta \\ \beta \ast \to .11 \\ 1\alpha \to \alpha 1 \\ 1\ast \to \alpha 1 \ast \end{cases}$	**22**	2	$\begin{cases} \alpha 1 \to 1\beta \\ \beta 1 \to 1\alpha \\ \alpha \ast \to \gamma \\ \gamma 1 \to 11\gamma \\ \gamma \to . \\ \beta \ast \to \delta \\ \delta 11 \to \delta 1 \\ \delta \to . \\ \to \alpha \end{cases}$

23	3	$\begin{cases} 1* \to *1 \\ **1 \to \alpha \\ \alpha 11 \to 1\alpha \\ \alpha 1 \to . \\ \alpha \to . \end{cases}$	**24**	2	$\begin{cases} \alpha 1 \to 1\beta \\ \beta 1 \to 1\alpha \\ \alpha * \to \gamma \\ \beta * 1 \to . \\ \gamma 1 \to \gamma \\ \gamma \to . \\ \to \alpha \end{cases}$
25	3	$\begin{cases} \alpha 1 \to 11\alpha \\ \alpha *1 \to \beta \\ \beta 1 \to \beta \\ \beta * \to .111 \\ \to \alpha \end{cases}$	**26**	3	$\begin{cases} 1*1 \to 1* \\ **1 \to \alpha \\ \alpha 1 \to 111\alpha \\ \alpha \to . \end{cases}$
27	2	$\begin{cases} \alpha 1 \to 1\alpha \\ \alpha * \to \beta \\ \beta 1 \to \beta \\ \beta \to .11 \\ \to \alpha \end{cases}$	**28**	2	$\begin{cases} 11*11 \to .11 \\ * \to \beta \\ \beta 1 \to 11\beta \\ 1\beta \to . \end{cases}$

Таблица 3.2.3(окончание)

№	n	f	№	n	f
29	2	$\begin{cases} \alpha 1 \to 1\beta 1\alpha \\ \alpha *1 \to \\ \beta \to \gamma \\ \gamma \to . \\ \to \alpha \end{cases}$	**30**	3	$\begin{cases} \alpha 1 \to \alpha \\ \alpha * \to \beta \\ \beta 1 \to 11\beta \\ \beta * \to . \\ \to \alpha \end{cases}$

Пример решения задания 3.2.3

Решить задание 3.2.3 для $f(x,y,z)$, вычисляемой нормальным алгоритмом с данной. схемой подстановок: $\begin{cases} *1 \to \alpha \\ \alpha\alpha 1 \to 11\alpha\alpha \\ \alpha\alpha \to . \\ \alpha 1 \to \alpha \end{cases}$

1. Вначале мы имеем запись изображения набора аргументов $1^{x+1}*1^{y+1}*1^{z+1}$. Запишем последовательность слов, получающихся при работе данного нормального алгоритма над словом $1^{x+1}*1^{y+1}*1^{z+1}$:

$1^{x+1}\underline{*1}1^{y}*1^{z+1}$, $1^{x+1}\alpha 1^{y}\underline{*1}1^{z}$, $1^{x+1}\underline{\alpha 1}1^{y-1}\alpha 1^{z}$, $1^{x+1}\underline{\alpha 1}1^{y-2}\alpha 1^{z}$,

$\ldots, 1^{x+1}\underline{\alpha\alpha 1}1^{z-1}$, $1^{x+3}\underline{\alpha\alpha 1}1^{z-2}$, $1^{x+5}\underline{\alpha\alpha 1}1^{z-3}, \ldots$, $1^{x+2z+1}\underline{\alpha\alpha}$, 1^{x+2z+1}.

Итак, в результате работы нормального алгоритма над изображением набора аргументов получилось слово из $x+2z+1$ единиц, которое служит изображением числа $x+2z$.

Значит, искомая функция имеет вид $f(x,y,z)=x+2z$.

2. Проверим работу алгоритма над изображением набора аргументов (2,0,1): $111\underline{*1}*11$, $111\alpha\underline{*1}1$, $111\underline{\alpha\alpha 1}$, $11111\underline{\alpha\alpha}$, 11111.

В результате получено изображение числа 4.

Но $f(2,0,1)=2+2\cdot 1=4$. Так что нормальный алгоритм получил то, что и должен был получить.

3.3. Рекурсивные функции

Числовой функцией называется функция вида $f: N_0^n \to N_0$, где $N_0=\{0,1,2,3,\ldots\}$.

Исходными функциями называются числовые функции следующих видов: 1) $o(x)\equiv 0$ - *нулевая функция;*

2) $s(x)\equiv x+1$ - *функция следования;*

3) $I_k^n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_k$ - *функция выбора аргумента.*

Суперпозицией функций $f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, …, $f_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $g(y_1,y_2,\ldots,y_k)$ называется функция

$h(x_1,x_2,\ldots,x_n)=g(f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,f_k(x_1,x_2,\ldots,x_n))$, причём h определена только на тех наборах $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, на которых определены $f_1(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $f_2(a_1,a_2,\ldots,a_n),\ldots, f_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $g(f_1(a_1,a_2,\ldots,a_n), f_2(a_1,a_2,\ldots,a_n),\ldots,f_k(a_1,a_2,\ldots,a_n))$.

Говорят, что числовая функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ получена из числовых функций $g(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$, $h(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1})$ с помощью *примитивной рекурсии*, если выполняются два условия:

1) $f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},0) = g(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$;

2) $f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},y+1) = h(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},y,f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},y))$.

Операция минимизации по i-той переменной функции $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ обозначается $\mu_y(g(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},y,x_{i+1},\ldots,x_n) = x_i)$ и определяется так:

Рассмотрим соотношение $g(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},y,x_{i+1},\ldots,x_n) = x_i$, (*)

которое будем рассматривать, как уравнение относительно y.

Это уравнение будем решать подбором, подставляя вместо y последовательно числа 0,1,2, и т.д. Возможны случаи:

1) на некотором шаге левая часть соотношения (*) не определена. В этом случае считаем, что на наборе $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ операция минимизации не определена.

2) На каждом шаге левая часть соотношения (*) определена, но ни при каких y равенство не выполнится. В этом случае также считаем, что на наборе $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ операция минимизации не определена.

3) Левая часть соотношения (*) определена при $y=0,\ y=1,\ldots,$ $y=z-1,\ y=z,$ но при $y<z$ равенство (*) не выполнялось, а при $y=z$ оно выполняется. В этом случае число z считается значением операции минимизации на наборе $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Примитивно-рекурсивной называется числовая функция, которая может быть получена из исходных за конечное число шагов с помощью применения операций суперпозиции и примитивной рекурсии.

Частично-рекурсивной называется числовая функция, которая может быть получена из исходных с помощью применения конечного числа раз операций суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации.

Задание 3.3.1

Найти функцию $f(x,y)$, полученную из функций $g(x)$ и $h(x,y,z)$ по схеме примитивной рекурсии.

Таблица 3.3.1

№	$g(x)$	$h(x,y,z)$
1	x^2	xz
2	2	z^x
3	x	$x+y-z$
4	x	$\left[\frac{x+z}{2}\right]$
5	1	$x(y+1)z$
6	x	$x+z$
7	0	$y+z+1$

№	$g(x)$	$h(x,y,z)$
8	x^4	$\sqrt[4]{z}\cdot x^3$
9	x	zx
10	x	$y+z$
11	3	z^{y+1}
12	1	$xy+x$
13	1	$\frac{x}{z}$
14	0	x^3+z

Таблица 3.3.1(окончание)

№	$g(x)$	$h(x,y,z)$
15	x	$xyz+xz$
16	x	z^2
17	x	$\frac{3x}{z}$
18	$2x$	$2x+z$
19	x	$x-z$
20	0	$x+2y$
21	0	$x+y+z$
22	x^3	$\sqrt[3]{z}\cdot x^2$

№	$g(x)$	$h(x,y,z)$
23	0	$\lvert z-x\rvert$
24	x	$x+y$
25	x	$zy+z$
26	x^2	$3y+z$
27	0	y^3+z
28	0	$x+y^2+z$
29	1	$z+3y$
30	0	$x-y+z$

Пример решения задания 3.3.1

Решить задание 3.3.1 для функций: $g(x) = x^2$; $h(x, y, z) = (y+2)xz.$

Найдём несколько значений функции f :

$f(x,0) = g(x) = x^2$;

$f(x,1) = h(x,0, f(x,0)) = h(x,0,x^2) = 2 \cdot x \cdot x^2 = 2x^3$;

$f(x,2) = h(x,1, f(x,1)) = h(x,1,2x^3) = 3 \cdot x \cdot 2x^3 = 3!x^4$;

$f(x,3) = h(x,2, f(x,2)) = h(x,2,3!x^4) = 4 \cdot x \cdot 3!x^4 = 4!x^5$.

Возникает предположение, что $f(x, y) = (y+1)!x^{y+2}$; (1)

Докажем формулу (1) методом математической индукции, проведя индукцию по y:

1) Проверка при $y = 0$.

$f(x,0) = x^2 = (0+1)!x^{0+2}$. Да, при $y = 0$ формула (1) верна.

2) Допустим, что предложение (1) верно при $y = n$, т.е. допустим, что верна формула $f(x,n) = (n+1)!x^{n+2}$; (2)

3) Докажем, что предложение (1) верно при $y = n+1$, т.е. докажем справедливость формулы $f(x,n+1) = (n+2)!x^{n+3}$ (3)

Выразим $f(x,n+1)$ с помощью схемы примитивной рекурсии:

$f(x,n+1) = h(x,n,f(x,n)) = h(x,n,(n+1)!x^{n+2}) =$

$= (n+2) \cdot x \cdot (n+1)!x^{n+2} = (n+2)!x^{n+3}$. Итак, в предположении справедливости формулы (2) доказана формула (3).

На основании метода математической индукции утверждаем, что предложение (1) справедливо для всех $y \in N_0$.

<u>Ответ</u>: $f(x, y) = (y+1)!x^{y+2}$.

Задание 3.3.2

Найти функции, получаемые из данной числовой функции $f(x_1, x_2,...,x_n)$ с помощью операции минимизации по каждой её переменной.

Таблица 3.3.2

№	n	$f(x_1,x_2,...,x_n)$	№	n	$f(x_1,x_2,...,x_n)$
1	4	$x_1x_2+x_3$	**10**	4	$x_1+\frac{x_2}{x_3}$
2	3	$x_1^2-\frac{1}{x_2}$	**11**	3	$2(x_1-x_2)$
3	3	$2^{x_1}(2x_2+1)$	**12**	4	$x_1-x_2x_3$
4	4	$\frac{x_1(x_2+1)}{x_3}$	**13**	4	$x_1^{x_2}+x_3$
5	3	x_1-2x_2	**14**	4	$x_1(x_2-1)x_3$
6	3	$x_1^3+3x_2$	**15**	4	$\sqrt{x_1}-x_2x_3$
7	3	$x_1x_2^2+1$	**16**	4	$x_1^2-x_2x_3$
8	4	$x_1+x_2-2x_3$	**17**	3	$\sqrt[3]{x_1}+2\sqrt{x_2}$
9	3	$x_1(x_2-1)^2$	**18**	3	$x_1+log_2 x_2$

Таблица 3.3.2(окончание)

№	n	$f(x_1,x_2,...,x_n)$	№	n	$f(x_1,x_2,...,x_n)$
19	4	$\frac{1}{x_1}+x_2x_3^2$	**25**	3	$\sqrt{x_1}-4^{x_2}$
20	3	$3^{x_1}+\sqrt{x_2}$	**26**	4	$3x_1-\frac{x_2}{x_3^2}$
21	4	$x_1+x_2-2x_3$	**27**	3	$2x_1+x_2^5$
22	4	$\sqrt{x_1-x_2}+x_3$	**28**	4	$x_1x_2-\sqrt{x_3}$
23	3	$x_2^{\frac{1}{x_1}}$	**29**	3	$x_1^3+\frac{x_2-4}{2}$
24	4	$x_1\sqrt{x_2}-x_3$	**30**	4	$6x_1x_2^3+lg\, x_3$

Пример решения задания 3.3.2

Решить задание 3.3.2 для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 - \frac{x_1}{x_3}$.

1) Минимизируем данную функцию по переменной x_1.

Рассмотрим уравнение $x_2 - \frac{y}{x_3} = x_1$. (1)

а) Если $x_2 = x_1$, то при подстановке вместо y нуля получаем верное равенство.

б) Если $x_2 \neq x_1$, $x_3 \neq 1$, то при подстановке в уравнение (1) вместо y единицы в левой части уравнения (1) появляется неосмысленное выражение - дробь $\frac{1}{x_3}$, значит, в этом случае операция минимизации не определена.

в) Если $x_3 = 1$, но $x_2 < x_1$, уравнение (1) примет вид $x_2 - y = x_1$.

Это уравнение не может выполнится ни при каких $y \in N_0$.

г) Если $x_3 = 1$, но $x_2 \geq x_1$, то при $y = x_2 - x_1$ равенство (1) выполнится.

Итак, $$\mu_y\left[x_2 - \frac{y}{x_3} = x_1\right] = \begin{cases} 0, & \text{если } x_2 = x_1; \\ \text{не определено, если} & x_3 \neq 1, \quad x_2 \neq x_1 \\ \text{не определено, если} & x_3 = 1, \quad x_2 < x_1 \\ x_2 - x_1, \quad \text{если} & x_3 = 1, \quad x_2 \geq x_1 \end{cases}$$

2) Минимизируем данную функцию по переменной x_2.

Рассмотрим уравнение $y - \frac{x_1}{x_3} = x_2.$. (2)

Если $x_1 = 0$, а $x_3 \neq 0$, то уравнение (2) примет вид $y = x_2$ и имеет решением число x_2.

Если $x_1 \neq 0$, то на самом первом шаге, при подстановке вместо y нуля, в левой части соотношения (2) возникает отрицательное число, т.е. неосмысленное выражение.

Итак, Итак, $\mu_y\left[y - \dfrac{x_1}{x_3} = x_2\right] = \begin{cases} x_2, \text{ если } x_1 = 0, \quad x_3 \neq 0; \\ \text{не определено в остальных случаях}. \end{cases}$

3) Минимизируем данную функцию по переменной x_3.

Рассмотрим уравнение $$x_2 - \frac{x_1}{y} = x_3. \qquad (3)$$

Это уравнение на самом первом шаге, при подстановке вместо y нуля теряет смысл, значит операция минимизации по третьей переменной $\mu_y\left[x_2 - \dfrac{x_1}{y} = x_3\right]$ нигде не определена.

4) Минимизируем данную функцию по переменной x_4.

Рассмотрим уравнение $$x_2 - \frac{x_1}{x_3} = x_4. \qquad (4)$$

Если набор переменных таков, что левая часть соотношения (4) имеет смысл и равенство (4) выполнено, то можно считать, что оно выполнено при "подстановке" в соотношение (4) переменной y на самом первом шаге, т.е. при $y = 0$.

В остальных случаях значение операции минимизации не определено. Итак,

$$\mu_y\left[x_2 - \frac{x_1}{x_3} = x_4\right] = \begin{cases} 0, \text{ если } x_2 - \dfrac{x_1}{x_3} = x_4; \\ \text{не определено в остальных случаях.} \end{cases}$$

Глава 4. Предикаты

4.1 Предикаты

Предикатом называется функция, область значений которой включена во множество $E = \{0,1\}$.

Предикат P называется *тождественно истинным (тождественно ложным)*, если на всех наборах своих переменных он принимает значение 1(0).

Предикат называется *выполнимым*, если на некотором наборе своих переменных он принимает значение 1.

Предикатом $\forall_{x_1} P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется предикат $T(x_2, \ldots, x_n)$, который принимает значение 1 на тех и только тех наборах $(a_2, \ldots, a_n)$, при которых предикат $P(x_1, a_2, \ldots, a_n)$ – тождественно истинный.

Предикатом $\exists_{x_1} P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется предикат $R(x_2, \ldots, x_n)$, который принимает значение 1 на тех и только тех наборах $(a_2, \ldots, a_n)$, при которых предикат $P(x_1, a_2, \ldots, a_n)$ выполним.

Если предикат $P(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таков, что $y \in \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$, то

$\forall_y P(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(b_1, x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge P(b_2, x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge \ldots$
$\ldots \wedge P(b_\mathrm{k}, x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$\exists_y P(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(b_1, x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee P(b_2, x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee \ldots$
$\ldots \vee P(b_\mathrm{k}, x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Теоремы об отрицании кванторов:

Для любого предиката $P(y, x_1, \ldots, x_n)$ справедливы формулы

$$\overline{\forall_y P(y,x_1,x_2,\ldots,x_n)} = \exists_y \overline{P(y,x_1,x_2,\ldots,x_n)}$$
$$\overline{\exists_y P(y,x_1,x_2,\ldots,x_n)} = \forall_y \overline{P(y,x_1,x_2,\ldots,x_n)}$$

Говорят, что предикатная формула находится в *приведённой форме*, если в ней используются лишь операции квантификации, отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, причём отрицание относится лишь к предикатным буквам.

Говорят, предикатная формула находится в *предварённой нормальной форме*, если она имеет вид $D_{n_1} D_{n_2} \ldots D_{n_k}(A)$, где D - либо квантор общности, либо квантор существования, A - формула, находящаяся в приведённой форме, не содержащая кванторов.

Задание 4.1.1

Построить n - местные предикаты на множестве M такие, что выполнено условие α. (A - множество всех людей)

Таблица 4.1.1

№	n	M	α
1	3	$R \times Z \times R$	$P(x,y,\pi) \equiv 1$, $P(1,y,z) \wedge \neg Q(\sqrt{2},-1,z)$ - выполним
2	2	$Z \times A$	$P(0,y) \equiv 0$, $P(x,y) \to \neg Q(1,y)$ - выполним
3	3	$Z \times Z \times N$	$P(x,-3,2)$ - выполним, $P(x,y,z) \leftrightarrow Q(2,1,z) \equiv 0$
4	3	$A \times Z \times N$	$P(x,0,z) \equiv 1$, $P(x,y,2) \vee \neg Q(x,0,z)$ - выполним
5	3	$N \times R \times R$	$P(x,1,z) \equiv 0$, $\neg P(x,y,z) \wedge Q(1,y,z)$ - выполним
6	3	$A \times N \times A$	$P(x,y,z)$ - выполним, $P(x,20,z) \to \neg Q(x,20,z) \equiv 0$
7	3	$R \times N \times Z$	$P(2,1,z) \equiv 0$, $P(x,y,-1) \leftrightarrow \neg Q(\pi,2,3)$ - выполним
8	2	$R \times R$	$P(x,y)$ - выполним, $\neg P(x,\sqrt{2}) + Q(x,y) \equiv 0$

9	3	$Z \times Z \times R$	$P(-1,2,z) \equiv 1$, $P(x,y,\sqrt{3}) \to \neg Q(0,y,z)$ - выполним
10	3	$A \times A \times R_+$	$P(x,y,3)$ - выполним, $P(x,y,z) \vee \neg Q(x,y,16) \equiv 1$

Таблица 4.1.1(продолжение)

№	*n*	*M*	α
11	3	$N \times Z \times N$	$P(2,y,z) \equiv 1$, $\neg Q(1,y,3) \to P(x,-1,z)$ - выполним
12	3	$A \times N \times N$	$P(x,y,4)$ - выполним, $P(x,2,z) \vee \neg Q(x,y,3) \equiv 1$
13	3	$R \times N \times N$	$P(x,3,4) \equiv 0$, $\neg P(x,y,2) \leftrightarrow \neg Q(x,3,z) \equiv 1$
14	3	$R \times R \times N$	$P(\sqrt{3},-5,z)$ - выполним, $P(x,y,2) \wedge \neg Q(x,\sqrt{3},z) \equiv 1$
15	3	$A \times R \times N$	$P(x,y,19) \equiv 1$, $P(x,3,z) \to Q(x,y,7) \equiv 0$
16	3	$R \times R \times Z$	$P(\pi,e,z)$ - выполним, $\neg P(x,y,-1) + Q(x,2,z) \equiv 1$
17	2	$A \times N$	$P(x,180) \equiv 0$, $P(x,y) \vee \neg Q(x,20)$ - выполним
18	3	$N \times N \times N$	$P(2,y,4)$ - выполним, $\neg P(x,y,z) \leftrightarrow Q(2,3,z) \equiv 1$
19	3	$R \times R \times N$	$P(x,y,3) \equiv 1$, $P(x,y,z) \wedge Q(x,y,3)$ - выполним
20	3	$N \times R \times Z$	$P(x,0,z)$ - выполним, $P(x,y,-4) \to \neg Q(x,3,z) \equiv 0$
21	3	$R \times R \times A$	$P(3,3,z) \equiv 0$, $P(x,\sqrt{19},z) \vee Q(x,y,z)$ - выполним
22	2	$R \times R$	$P(10,y)$ - выполним, $\neg P(x,y,) \leftrightarrow Q(20,y) \equiv 1$
23	3	$R \times N \times R$	$P(\sqrt{3},y,z) \equiv 1$, $P(x,y,z) \to Q(1,y,z)$ - выполним

24	3	$A \times A \times A$	$P(x, y, z)$ - выполним, $P(x, y, z) + Q(x, y, z) \equiv 1$
25	3	$Z \times Z \times N$	$P(x, -3, 2) \equiv 0$, $P(x, y, z) \vee \neg Q(2, 1, z)$ - выполним
26	2	$A \times N$	$P(x, 10) \equiv 1$, $P(x, y) \vee Q(x, 2)$ - выполним

Таблица 4.1.1(окончание)

№	n	M	α
27	3	$N \times Z \times R$	$P(x, y, 8)$ - выполним, $P(3, 4, z) \vee \neg Q(x, y, z) \equiv 0$
28	3	$Z \times Z \times N$	$P(9, -9, z) \equiv 0$, $\neg P(1, y, z) \to Q(x, y, z)$ - выполним
29	3	$A \times A \times Z$	$P(x, y, -2)$ - выполним, $P(x, y, z) \leftrightarrow \neg Q(x, y, z) \equiv 1$
30	3	$Z \times N \times R$	$P(6, y, z) \equiv 1$, $P(x, 2, z) \wedge Q(x, y, 3)$ - выполним

Пример решения задания 4.1.1

Построить трёхместные предикаты P и Q на множестве

$N \times N \times Z$ такие, что $P(1, y, -3)$ - выполним, и $P(x, y, z) \to Q(x, 1, z) \equiv 0$.

Пусть $P(x, y, z) : (x + 2y - z$ кратно 4);

$Q(x, y, z) : (x + y + z + 5$ - нечётное число).

Тогда $P(1, y, -3) = T(y) : (2y + 4$ кратно 4).

$T(1) = (2 + 4$ кратно 4) = 0; $T(1) = (4 + 4$ кратно 4) = 1.

Значит, $T(y) = P(1, y, -3)$ - выполнимый предикат.

Обозначим $S(x, y, z) = \mathrm{P}(x, y, z) \to \mathrm{Q}(x, 1, z)$.

Покажем, что $S(x, y, z) \equiv 0$.

Предикат $S(x, y, z)$ может принять значение 1 лишь на таком наборе (a, b, c), при котором $P(a, b, c) = 1$ и $Q(a, 1, c) = 0$, т.е.

$a + 2b - c$ кратно 4 и $a + 1 + c + 5$ - нечётное число.

Запишем эти высказывания в равносильной форме:

$\begin{cases} a+2b-c=4m \\ a+1+c+5=2n-1 \end{cases}$, где $m,n \in Z$.

Но тогда, складывая уравнения этой системы, получим:

$2a+2b+6=4m+2n-1$, или $4m+2n-2a-2b=7$, откуда

$2(2m+n-a-b)=7$. В левой части этого равенства стоит чётное число, а в правой - нечётное. Значит, ни при каких значениях переменных x,y,z предикат $S(x,y,z)$ не может принимать значения 1, следовательно, $S(x,y,z)=P(x,y,z)\to Q(x,1,z)\equiv 0$.

Задание 4.1.2

Выяснить местность и тип предиката каждый аргумент которого принимает значения из множества M.

Таблица 4.1.2

№	M	P	№	M	P
1	Z	$\forall_x(x+y-z>2)$	**16**	R	$\exists_y\forall_x(yx^2=3yx+z)$
2	R	$\exists_x\forall_y(xy=z-x)$	**17**	Z	$\exists_x\forall_y(2y+x>x+z^2)$
3	N	$\forall_x\exists_y(xyz=yz)$	**18**	N	$\forall_y(x-2y<z-y)$
4	R	$\forall_z(\sqrt{xyz}>\sqrt{x})$	**19**	Z	$\forall_x\exists_y(x+y+z=5)$
5	N	$\exists_x\exists_y(zx=y^2)$	**20**	R	$\exists_x\forall_y(xy\text{-}2x^2z>0)$
6	Z	$\forall_x\exists_y(xz=y)$	**21**	Z	$\forall_x\exists_z(xy=xz)$
7	R	$\exists_y\forall_x(x+2y>y+z)$	**22**	N	$\exists_y\forall_x(xy-zx<0)$
8	N	$\forall_x(x^2+\lvert xyz\rvert>0)$	**23**	R	$\exists_z(xy+z^2>2xy)$
9	R	$\forall_x\exists_y(x^2+z^2>2(x+y)^2)$	**24**	Z	$\forall_y\exists_z(xz=y)$
10	Z	$\forall_x\forall_y(x+y+z>\sqrt[3]{xyz})$	**25**	R	$\forall_x\exists_z(xz-y^2z>0)$
11	R	$\exists_x(x^2+3yz=7)$	**26**	N	$\exists_x(y+xz=4)$

12	N	$\forall_x \forall_y (xz = y^2)$		**27**	Z	$\forall_y \exists_z (x^2 + yz > 0)$
13	R	$\forall_x \exists_z (yx + yz < 0)$		**28**	R	$\exists_y (yx - xyz > 0)$
14	Z	$\exists_y (y + z > x + 2y)$		**29**	N	$\forall_x \exists_z (z > xy^3)$
15	N	$\forall_x (x^2 - y^2 > x + z)$		**30**	Z	$\exists_x (xz + yx = 1)$

Пример решения задания 4.1.2

Выяснить местность и тип предиката $P = \forall_x \exists_y (zy = x^2)$, каждый аргумент которого принимает значения из множества Z.

Из определения операции навешивания кванторов следует, что предикат P зависит от переменной z.

Так как предикат $y \cdot 0 = 1$ не является выполнимым, следовательно, высказывание $\exists_y (y \cdot 0 = 1)$ ложно. Значит, предикат $\exists_y (y \cdot 0 = x)$

не является тождественно истинным предикатом относительно x, следовательно, высказывание $\forall_x \exists_y (y \cdot 0 = x)$ ложно, то есть $P(0) = 0.$.

Для произвольного x_0 предикат относительно y $y \cdot 1 = x_0^2$ выполним (при $y = x_0^2$), значит, высказывание $\exists_y (y \cdot 1 = x_0^2)$ истинно. Следовательно, в виду произвольности x_0, имеем, что предикат $\exists_y (y \cdot 1 = x^2)$ - тождественно-истинный. Но тогда высказывание $\forall_x \exists_y (y \cdot 1 = x^2)$ истинно, то есть $P(1) = 1.$

Т.к. $P(0) = 0,$ а $P(1) = 1,$ $P(z)$ - выполнимый предикат.

Задание 4.1.3

Найти значение высказывания α, полученного из трёхместного предиката, определённого на множестве M.

Таблица 4.1.3

№	M	α	№	M	α
1	N	$\exists_x \forall_y \exists_z (xz = y)$	**5**	R	$\exists_z \exists_y \forall_x (xy - 3x^3 z > 0)$
2	R	$\forall_x \exists_y \exists_z (xy + z^3 < 2xy)$	**6**	R	$\forall_x \exists_z \forall_y (xy^2 = z - 1)$
3	N	$\forall_z \exists_y \forall_x (xy - zx > 0)$	**7**	Z	$\exists_z \forall_x \exists_y (x + 2y + z = 3)$
4	Z	$\forall_x \exists_y \exists_z (xy = xz)$	**8**	R	$\exists_z \forall_x \forall_y (x + 2y > z + 2y)$

Таблица 4.1.3(окончание)

№	M	α	№	M	α
9	N	$\forall_y \exists_x \exists_z (3y^2 - x > x + z)$	**20**	R	$\exists_y \forall_x \exists_z (y + xz > y + x^2 z)$
10	Z	$\exists_x \exists_y \forall_z (x^2 y < 3yz)$	**21**	Z	$\forall_z \exists_x \forall_y (xz = y^2)$
11	N	$\forall_x \exists_z \forall_y (x^2 - 2y^2 = x - z)$	**22**	N	$\exists_x \forall_y \forall_z (yx > xz + y)$
12	R	$\exists_x \forall_y \exists_z (x + y > x - y + z)$	**23**	R	$\forall_x \exists_z \forall_y (\sqrt{\lvert xyz \rvert} > \sqrt{\lvert x \rvert})$
13	Z	$\forall_x \forall_y \exists_z (3xy^2 + zy > 2)$	**24**	Z	$\exists_y \forall_x \exists_z (xyz < yz)$
14	N	$\exists_x \forall_y \exists_z (xz = y^3)$	**25**	N	$\forall_x \forall_z \exists_y (x + y - z > 3)$
15	R	$\forall_x \forall_z \exists_y (x^2 + 2yz = 6)$	**26**	N	$\exists_x \exists_y \forall_z (xz + y < xy^2)$
16	R	$\exists_x \forall_y \forall_z (x + y + z > \sqrt[3]{xyz})$	**27**	Z	$\forall_y \exists_z \forall_x (xy - z = 3y)$
17	N	$\exists_x \forall_y \exists_z (x^2 + z^2 > 2(x - y)^2)$	**28**	R	$\forall_y \exists_z \forall_x (x^2 + y^2 = z)$
18	Z	$\exists_z \forall_x \exists_y (x^2 + \lvert xy - z \rvert > 0)$	**29**	Z	$\forall_x \forall_y \exists_z (xz = y^2 z)$
19	N	$\forall_z \exists_y \exists_x (x + 2y < y + z)$	**30**	Z	$\forall_x \exists_z \forall_y (z^2 + y = x)$

Пример решения задания 4.1.3

Найти значение высказывания $\exists_y \forall_x \exists_z (x - z^4 \geq y)$, определённого на множестве R.

$\exists_y \forall_x \exists_z (x - z^4 \geq y) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ предикат относительно y $\forall_x \exists_z (x - z^4 \geq y)$ не выполним $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ для произвольного y_0 предикат $\forall_x \exists_z (x - z^4 \geq y_0) = 0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ для произвольного y_0 предикат $\exists_z (x - z^4 \geq y_0)$ - не является тождественно-истинным относительно x $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ для произвольного y_0 высказывание $\exists_z (y_0 - 1 - z^4 \geq y_0)$ ложно $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists_z (z^4 \leq -1) = 0$ $\Leftrightarrow$ предикат $z^4 \leq -1$ не является выполнимым.

А он действительно не является выполнимым, т.к. любое действительное число в чётной степени не может быть меньше, чем -1.

Итак, получено, что исходное высказывание ложно.

Задание 4.1.4

Предикаты P и Q определены на множестве $\{a, b, c\}$.

1. Найти предикат, равносильный предикату R, но не содержащий кванторов.

2. Выяснить, может ли предикат R быть выполнимым, но не тождественно истинным.

Таблица 4.1.4

№	R	№	R
1	$\forall_x \forall_y P(x, y) \leftrightarrow \exists_y Q(y, z)$	**16**	$\exists_x \forall_y P(x, y) + \forall_z Q(z, x)$
2	$\forall_x \exists_y P(x,y) \to \exists_y \forall_x Q(x,y,z)$	**17**	$\forall_x P(y, z) \to \exists_y \forall_x Q(y, z)$
3	$\exists_z \forall_y P(y, z) \wedge \forall_x Q(x, y)$	**18**	$\exists_y \forall_x P(x, y) \vee \forall_z Q(x, z)$
4	$\forall_x \exists_y (P(x, y) \wedge Q(y, z))$	**19**	$\exists_x \forall_y (P(x, z) \wedge \forall_z Q(y, z))$
5	$\exists_x P(x, y) \vee \forall_y \exists_z Q(y, z)$	**20**	$\forall_x P(x, y) \vee \exists_z \forall_x Q(x, z)$
6	$\forall_x \exists_y P(x, y) + Q(x, z)$	**21**	$\forall_z \exists_x P(x, z) \to \exists_y Q(x, y)$
7	$\exists_x P(x, z) \to \forall_x \exists_y Q(y, x)$	**22**	$\exists_x P(x, y) + \forall_x \exists_z Q(y, z)$

8	$\exists_x \forall_y (P(x,z) \vee Q(y,x))$		**23**	$\forall_x \exists_y P(x,y) \vee \exists_z Q(x,z)$
9	$\forall_x \exists_y P(y,x) \leftrightarrow Q(x,z)$		**24**	$\exists_z P(x,z) \wedge \exists_x \forall_y Q(x,y)$
10	$\forall_z P(x,z) \vee \exists_x \forall_z Q(x,z)$		**25**	$\forall_x \exists_y P(x,y) \vee \exists_y Q(y,z)$
11	$\exists_x P(x,z) \wedge \exists_y \forall_x Q(x,y)$		**26**	$\forall_x P(x,y) \leftrightarrow \forall_z \exists_y Q(y,z)$
12	$\forall_x \exists_y P(x,y) \to \exists_x Q(x,z)$		**27**	$\exists_z P(x,z) \to \exists_x \forall_y Q(x,y)$
13	$\exists_y \forall_x P(x,y) \vee \forall_x Q(x,z)$		**28**	$\forall_y \exists_z P(y,z) \vee \forall_x Q(x,z)$
14	$\exists_x \exists_z P(x,y) \leftrightarrow \forall_x Q(x,z)$		**29**	$\forall_y P(y,z) \wedge \forall_y \exists_z Q(x,z)$
15	$\forall_x P(x,z) \wedge \exists_x \exists_y Q(x,y)$		**30**	$\exists_x \exists_y P(y,z) \leftrightarrow \forall_z Q(y,z)$

Пример решения задания 4.1.4

Решим задание 4.1.4 для предиката $\forall_y \exists_z P(z,y) + \exists_x Q(x,y)$.

По свойствам предикатов, определённых на конечных множествах, имеем: $\forall_y \exists_z P(z,y) + \exists_x Q(x,y) = \exists_y P(a,y) \wedge \exists_y P(b,y) \wedge \exists_y P(c,y) +$

$+ \exists_x Q(x,y) = (P(a,a) \vee P(a,b) \vee P(a,c)) \wedge (P(b,a) \vee P(b,b) \vee P(b,c)) \wedge$
$\wedge (P(c,a) \vee P(c,b) \vee P(c,c)) + (\mathrm{Q}(a,y) \vee \mathrm{Q}(b,y) \vee \mathrm{Q}(c,y))$.

Пусть $P(z,y)$ - тождественно-ложный предикат. Тогда высказывание ложно, так как конъюнкция и дизъюнкция ложных высказываний ложна, и выражение: $\forall_y \exists_z P(z,y) + \exists_x Q(x,y)$ равносильно выражению $\exists_x Q(x,y)$.

Если положить $Q(a,a) = Q(a,b) = Q(a,c) = 0$ и $Q(b,a) = 1$, то

$R(a) = 0 + (0 \vee 0 \vee 0) = 0;$ $\quad R(b) = 0 + (1 \vee \ldots) = 1.$

Итак, предикат $R(y)$ может быть выполнимым, но не тождественно истинным.

Задание 4.1.5

1. Представить в приведённой форме предикат D варианта №.

2. Представить в предварённой нормальной форме предикат D варианта № + 1

Таблица 4.1.5

№	D
1	$\forall_x P(x,y,z) \to (\exists_y \forall_z Q(x,y,t) \mid R(x,y))$
2	$(\exists_x \exists_y R(y,x,z) \vee T(x,y)) \downarrow \forall_x P(x,y,z)$
3	$(\forall_x \exists_y T(x,y) \to R(x,z)) \mid \exists_x P(x,y)$
4	$(\exists_x \forall_y P(y,z,t) \mid R(x,y,z)) \wedge \exists_y T(x,y,t)$
5	$(\forall_x \forall_y T(x,y,t) \downarrow \exists_x P(x,y)) \mid R(x,y,z)$
6	$(\exists_x P(x,y,z) \downarrow \forall_x \exists_y R(y,z,t)) \wedge T(x,y)$

Таблица 4.1.5(продолжение)

№	D
7	$\overline{\forall_y R(x,y,t) \to \exists_x \forall_z P(x,y,z)} \vee T(x,y)$
8	$(\forall_x \exists_y P(x,z,t) \mid \forall_z R(x,y,z)) \mid T(x,y)$
9	$(\exists_x \forall_y P(x,y,z) \downarrow \forall_x S(x,y,t)) \vee R(y,z)$
10	$(\forall_x \forall_y R(x,y,z) \mid \exists_x S(x,y)) \to P(y,z)$
11	$(\exists_x \forall_y P(x,y,z) \downarrow \exists_y R(x,y,t)) \mid T(y,z)$
12	$\forall_x \exists_y P(x,y,t) \wedge \exists_z \exists_x T(x,y,t) \leftrightarrow \forall_t R(x,t)$
13	$(\exists_x P(x,y) \mid \forall_x \exists_y R(x,y,z)) \vee \overline{\forall_x \forall_y T(x,y)}$
14	$(\forall_x \exists_y R(x,y,z) \downarrow \forall_x \forall_z T(x,y,z)) \vee P(y,z)$
15	$\exists_x \forall_y P(z,x,y) \to (\exists_z R(x,t,z) \mid T(x,y))$
16	$(\forall_x \forall_y P(x,z) \downarrow \exists_z R(x,y,z)) \wedge T(x,z)$
17	$(\exists_x \forall_y R(x,y,t) \mid \exists_z P(x,y,z)) \vee T(y,z)$
18	$\forall_t \exists_x R(x,t) \to \exists_z P(x,z) \wedge \overline{\forall_x T(x,y)}$
19	$(\exists_x \forall_y P(y,x,t) \mid Q(x,y,z)) \to \forall_x T(x,y)$
20	$(\forall_x \exists_y P(x,y,z) \mid T(x,t)) \mid \forall_x R(x,y)$

21	$(\exists_x \forall_y P(x,y,t) \to \exists_x T(x,y)) \to R(x,t)$
22	$(\forall_x \forall_y P(x,y,t) \mid \exists_x T(x,y)) \vee \overline{Q(x,y,z)}$
23	$(P(x,y,z) \mid \forall_x \exists_y T(x,y,t)) \wedge \forall_x R(x,z)$
24	$(\forall_x \exists_y P(x,y,z) \downarrow \forall_y Q(x,y,z)) \to \exists_x T(x,z)$
25	$(\exists_x \forall_y P(x,y,z) \vee \exists_y Q(x,y,t)) \mid S(x,y,z)$
26	$\exists_x R(x,y,z) \wedge (\forall_x \forall_z Q(y,z,t) \downarrow P(z,x,y))$
27	$\forall_y \exists_z P(x,y,z) \to (R(x,y,t) \mid \exists_x \forall_z T(x,z,y))$
28	$\exists_x P(x,y,z) \to \exists_y \forall_z Q(t,y,z) \vee R(x,y,t)$

Таблица 4.1.5(окончание)

№	D
29	$\exists_x \forall_y P(x,y,t) \wedge T(y,z,t) \to \forall_y \forall_z Q(x,y,t)$
30	$\exists_x P(x,z,y) \vee (\forall_x \exists_z Q(x,y,t) \mid R(x,y))$

Пример решения задания 4.1.5

1. Представить в приведённой форме предикат

$$\forall_z \exists_x P(x,y,z) \leftrightarrow R(y,z).$$

Воспользуемся формулой $a \leftrightarrow b = \overline{a} \cdot \overline{b} \vee a \cdot b$.

$\forall_z \exists_x P(x,y,z) \leftrightarrow R(y,z) =$

$\overline{\forall_z \exists_x P(x,y,z)} \cdot \overline{R(y,z)} \vee \forall_z \exists_x P(x,y,z) \cdot R(y,z)$.

Воспользуемся теоремами об отрицании кванторов. Получим: $\exists_z \forall_x \overline{P(x,y,z)} \cdot \overline{R(y,z)} \vee \forall_z \exists_x P(x,y,z) \cdot R(y,z)$. Так как кроме кванторов, символов конъюнкции, дизъюнкции и отрицания в формуле не используются другие символы предикатных операций, а отрицание относится лишь к предикатным буквам, приведённая форма получена.

2. Представить в предварённой нормальной форме предикат $\overline{\exists_x P(x,y,z) \to \forall_x \exists_y R(x,y,z)} \downarrow T(x,z)$.

Воспользуемся формулами $a \to b = \overline{a} \vee b$, $a \downarrow b = \overline{a} \cdot \overline{b}$ и $\overline{\overline{a}} = a$.

Получим: $\overline{\exists_x P(x,y,z) \to \forall_x \exists_y R(x,y,z)} \downarrow T(x,z) =$

$$= \overline{\overline{\exists_x P(x,y,z) \to \forall_x \exists_y R(x,y,z)}} \cdot \overline{T(x,z)} =$$

$$= (\exists_x P(x,y,z) \to \forall_x \exists_y R(x,y,z)) \cdot \overline{T(x,z)} =$$

$$= (\overline{\exists_x P(x,y,z)} \vee \forall_x \exists_y R(x,y,z)) \cdot \overline{T(x,z)}.$$

Переобозначим переменные:

$$(\overline{\exists_{x_1} P(x_1,y,z)} \vee \forall_{x_2} \exists_{y_1} R(x_2,y_1,z)) \cdot \overline{T(x,z)} =$$

$$= (\forall_{x_1} \overline{P(x_1,y,z)} \vee \forall_{x_2} \exists_{y_1} R(x_2,y_1,z)) \cdot \overline{T(x,z)}.$$

Теперь можно вынести все кванторы в начало формулы:

$$\forall_{x_1} \forall_{x_2} \exists_{y_1} ((\overline{P(x_1,y,z)} \vee \forall_{x_2} R(x_2,y_1,z)) \cdot \overline{T(x,z)})$$

Предварённая нормальная форма получена.

Задание 4.1.6

1. Записать с помощью кванторов высказывание α.
2. Составить высказывание “не α”.
3. Привести пример доказательства на основании высказывания “не α”.

Таблица 4.1.6

№	α
1	функция $f(x)$ непрерывна на (a,b)
2	числовая последовательность $\{a_n\}$ имеет пределом $-\infty$
3	функция $f(x)$ равномерно непрерывна на (a,b)
4	функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0
5	функция $f(x)$ ограничена на R
6	векторы линейного векторного пространства линейно зависимы
7	функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0

8	числовой ряд с общим членом a_n сходится к сумме S
9	функциональная последовательность $f_n(x)$ сходится поточечно к $f(x)$ на (a,b)
10	функциональная последовательность $f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$ на (a,b)
11	функция $f(x)$ стремится к $-\infty$ при $x \to +\infty$
12	числовая последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху
13	функция $f(x)$ монотонна на $[a,b]$
14	точка x_0 является точкой минимума функции $f(x)$
15	бинарное отношение φ является связным
16	числовая последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна

Таблица 4.1.6(окончание)

№	α
17	функция $f(x)$ непрерывна хотя бы в одной точке интервала (a,b)
18	функция $f(x)$ стремится к числу a при $x \to -\infty$
19	функция достигает наибольшего значения на отрезке в точке x_0
20	бинарное отношение φ является антисимметричным
21	функция $f(x)$ разрывна хотя бы в одной точке интервала (a,b)
22	функция $f(x)$ имеет в точке x_0 конечный скачок
23	булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ монотонна и сохраняет 0
24	множество A является собственным подмножеством B
25	булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является двойственной к функции $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
26	функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ конечное число точек разрыва
27	число $supX$ является точной верхней гранью числового множества X
28	функция $f(x)$ имеет в точке x_0 бесконечный скачок

29	график R является композицией графиков P и Q
30	множества A и B находятся в общем положении

Пример решения задания 4.1.6

Решим задание 4.1.6 для высказывания α: числовая последовательность $\{a_n\}$ является бесконечно малой.

1. Запишем данное определение α с помощью кванторов, представив предикатную формулу в предваренной нормальной форме:

$\forall_\varepsilon \exists_N \forall_n (\varepsilon > 0 \to (n > N \to |a_n| < \varepsilon))$.

2. Возьмём отрицание от этого определения, применив формулу $\overline{a \to b} = a \cdot \overline{b}$, а также теоремы об отрицании кванторов:

$$\overline{\forall_\varepsilon \exists_N \forall_n (\varepsilon > 0 \to (n > N \to |a_n| < \varepsilon))} =$$

$$= \exists_\varepsilon \overline{\exists_N \forall_n (\varepsilon > 0 \to (n > N \to |a_n| < \varepsilon))} =$$

$$= \exists_\varepsilon \forall_N \overline{\forall_n (\varepsilon > 0 \to (n > N \to |a_n| < \varepsilon))} =$$

$$= \exists_\varepsilon \forall_N \exists_n \overline{(\varepsilon > 0 \to (n > N \to |a_n| < \varepsilon))} =$$

$$= \exists_\varepsilon \forall_N \exists_n (\varepsilon > 0 \wedge \overline{n > N \to |a_n| < \varepsilon}) =$$

$$= \exists_\varepsilon \forall_N \exists_n (\varepsilon > 0 \wedge n > N \wedge \overline{|a_n| < \varepsilon}) =$$

$$= \exists_\varepsilon \forall_N \exists_n (\varepsilon > 0 \wedge n > N \wedge |a_n| \geq \varepsilon).$$

Отрицание от α получено, то есть получено определение того, что числовая последовательность $\{a_n\}$ не является бесконечно малой.

3. Докажем на основании полученного определения, что числовая последовательность с общим членом $a_n = (-1)^n \cdot n^2$ не является бесконечно малой.

Действительно, существует $\varepsilon = 0{,}5$, причём для любого N найдётся $n = N + 1$. Очевидно, $n > N$.

Тогда $|a_n| = |(-1)^n \cdot n^2| = n^2 \geq 0{,}5$.

Доказательство закончено.

Глава 5. Комбинаторика

5.1. Сочетания, размещения, перестановки

Пусть имеется n предметов, отмеченных числами $1,2,\ldots,n$. Из этих предметов выбираем один, записываем число, на нём изображённое, а сам предмет либо возвращаем назад, (в этом случае говорят о *выборе с возвращением*), либо он убирается и больше не может быть выбран (в этом случае говорят о *выборе без возвращения*). Повторяем эту процедуру k раз.

Запись, полученная в результате всех действий, называется *выборкой* из n элементов по k.

Запись, полученная по схеме выбора с возвращением, называется выборкой *с повторениями*, а запись, полученная по схеме выбора без возвращений, называется выборкой *без повторений*.

Если две выборки, отличающиеся только порядком записи символов, считают различными, то говорят о *размещении* из n элементов по k.

Если две выборки, отличающиеся только порядком записи символов, считают совпадающими, то говорят о *сочетании* из n элементов по k.

Через $\overline{A}_n^k$ обозначают число различных размещений с повторениями из n элементов по k. $\overline{A}_n^k = n^k$

Через A_n^k обозначают число различных размещений без повторений из n элементов по k. $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Через C_n^k обозначают число различных сочетаний без повторений из n элементов по k. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Через $\overline{C}_n^k$ обозначают число различных сочетаний с повторениями из n элементов по k. $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

Размещение из n элементов по n называется *перестановкой* n элементов. Число различных перестановок n элементов обозначают P_n.

$$P_n = n!$$

Пусть имеется k_1 элементов 1го типа, k_2 элементов 2го типа,..., k_m элементов m -го типа, причём элементы одного типа считаем неразличимыми. Тогда мы будем говорить, что у нас имеются *перестановки с повторениями*, и количество таких перестановок выражается числом

$$P(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$$

Задание 5.1.1

Сколькими способами из колоды карт в 36 листов можно выбрать неупорядоченный набор из 5 карт так, чтобы в этом наборе было бы точно:

Таблица 5.1.1

№	условия
1	1 король, 2 дамы, 1 пиковая карта
2	1 крестовая карта, 2 дамы, нет червей
3	хотя бы 4 крестовые карты, 1 туз
4	3 дамы, 2 крестовые карты
5	1 бубновая карта, 2 крестовых, 1 дама
6	2 бубновые, 2 крестовые карты, 1 туз
7	по крайней мере 4 пиковые карты, 1 дама
8	2 карты чёрной масти, 2 дамы
9	1 туз, 1 валет, 1 карта красной масти
10	3 туза, 3 карты чёрной масти
11	1 дама, 1 карта пик, 2 крестовых карты
12	2 дамы, 2 туза, 1 карта пиковой масти
13	дама и король одной масти, 1 пиковая карта
14	1 король, 2 дамы, 1 карта красной масти
15	не меньше 4 красных карт, 2 туза
16	2 чёрных карты, 1 карта червей, 1 туз
17	3 короля, 2 бубновых карты
18	1 король, 1 дама, 1 крестовая карта

Таблица 5.1.1(окончание)

№	условия
19	2 крестовых карты, 1 бубновая, 1 дама
20	1 бубновая карта, 2 дамы, нет червей
21	3 бубновых карты, 2 дамы, 1 валет
22	2 туза, не меньше 3 пиковых карт
23	2 карты красной масти, 3 туза
24	2 дамы, 1 бубновая карта, 1 пиковая карта
25	1 валет, нет дам, 3 чёрные карты
26	2 туза, по крайней мере 4 красные карты
27	валет и дама чёрной масти, не более 1 туза
28	1 туз, 3 дамы, не больше 2 карт красной масти
29	2 крестовые карты, хотя бы 2 туза
30	2 дамы, 1 король, нет червей

Пример решения задания 5.1.1

Сколькими способами из колоды карт в 36 листов можно выбрать неупорядоченный набор из 5 карт так, чтобы в этом наборе было бы точно два туза, одна дама, одна бубновая карта.

Рассмотрим случаи:

1. Среди пяти выбранных карт есть бубновая дама.

Бубновую даму можно выбрать единственным способом, два туза будут выбираться из трёх, т.к. бубновый туз не может быть выбран, и число способов выбора двух тузов равно $C_3^2 = 3$, к выбранным трём картам надо добавить до пяти ещё две карты так, чтобы они не были дамами, тузами и бубновыми картами.

Таких карт в колоде 21 штука. Число неупорядоченных выборок из 21 по 2 без повторений равно $C_{21}^2 = \frac{21!}{2!19!} = \frac{21 \cdot 20}{2} = 210$. По правилу произведения, число способов выбора 5 карт, среди которых есть бубновая дама, равно 1·3·210=630.

2. Среди пяти выбранных карт есть бубновый туз.

Бубнового туза можно выбрать единственным способом, второго туза к нему можно добавить тремя способами, выберем любую даму из трёх, т.к. бубновую даму выбирать не имеем права, этот выбор может быть сделан тремя способами, к выбранным трём картам надо добавить до пяти ещё две карты так, чтобы они не были дамами, тузами и бубновыми картами. Число способов выбора этих двух карт, как уже рассматривалось раньше, равно 210. По правилу произведения, число способов выбора 5 карт, среди которых есть бубновый туз, равно $1{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}210=1890$.

3. Среди пяти выбранных карт нет бубнового туза и бубновой дамы.

Выбираем одну даму из трёх (три способа), два туза из трёх ($C_3^2=3$ способа), одну бубновую карту, не являющуюся тузом или дамой (семь способов) и одну карту, не являющейся тузом, дамой или бубновой картой (21 способ). Число комбинаций равно $3{\cdot}3{\cdot}7{\cdot}21= 1323$.

Общее число способов выбора 5 карт, удовлетворяющих требованиям задачи, по правилу суммы, составит 630+1890+1323= 3843.

Ответ: 3843 способа.

Задание 5.1.2

Сколько различных слов можно получить перестановкой букв слова α?

Таблица 5.1.2

№	α	**условие**
1	*атаман*	согласные идут в алфавитном порядке, но буквы “*а*” не стоят рядом
2	*ворон*	две буквы “*о*” не стоят рядом
3	*интерниро-вание*	согласные и гласные чередуются, гласные идут в алфавитном порядке
4	*взбрыкнул*	между двумя гласными находятся 3 согласные
5	*пастух*	между двумя гласными расположены 2 согласные
6	*околоток*	ровно 3 буквы “*о*” не идут подряд
7	*криминал*	пятое и седьмое места заняты согласными
8	*переходим*	согласные и гласные чередуются
9	*перешеек*	четыре буквы “*е*” не идут подряд
10	*диктатура*	как гласные, так и согласные идут в алфавитном порядке
11	*катастрофа*	не меняется порядок согласных букв
12	*танкетка*	запрещено буквосочетание “*ант*”

Таблица 5.1.2(окончание)

№	α	условие
13	*комитет*	гласные не стоят рядом и разделяются буквами “*т*”
14	*парламент*	согласные идут в алфавитном порядке, гласные - в порядке, обратном алфавитному
15	*диссидент*	гласные чередуются с парами согласных
16	*полумера*	не встречается буквосочетание “*мурло*”
17	*министр*	нельзя сказать, что согласные идут в алфавитном порядке
18	*передел*	в начале и в конце слова стоит согласная буква
19	*приватизация*	чередуются пары гласных и согласных букв
20	*салага*	буква “*а*” идёт непосредственно после “*с*”
21	*президент*	согласные идут в алфавитном порядке
22	*кишмиш*	одинаковые буквы не идут друг за другом
23	*полномочия*	никакие гласные не стоят рядом
24	*логарифм*	второе, четвёртое и шестое места заняты согласными
25	*ультиматум*	между буквами “*т*” стоят все гласные и только они
26	*переворот*	не больше одной пары одинаковых букв стоят рядом
27	*капитуляция*	слово начинается с буквы “*а*”, чередуются гласные и согласные буквы
28	*легитим-ность*	не присутствуют буквосочетания “*гимн*” и “*тост*”
29	*белиберда*	между буквами “*б*” стоит блок из четырёх гласных
30	*коммунизм*	не встречается сочетание букв “*муки*”

Пример решения задания 5.1.2

Сколько различных слов можно получить перестановкой букв слова огород так, чтобы три буквы "о" не стояли бы рядом?

Общее количество различных слов, полученных перестановкой букв слова огород, равно $P(3,1,1,1)=\dfrac{(3+1+1+1)!}{3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}=\dfrac{6!}{3!}=6\cdot 5\cdot 4=120$. Если в каком-то слове все три буквы "*о*" стоят рядом, то тройную "*о*" можно считать единым символом, и количество слов, в которых три буквы "*о*" стоят рядом, равно P(4)=4!=24.

В итоге получаем: 120 – 24 = 96.

Ответ: 96слов.

5.2. Бином Ньютона и полиномиальная формула

Некоторые свойства биномиальных коэффициентов:

1) $C_n^0=C_n^n=1; \quad C_n^1=C_n^{n-1}=n;$

2) $C_n^k=C_n^{n-k}$ - свойство *симметричности;*

3) $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$ - свойство *арифметического треугольника*;

4) $\left.\begin{array}{l} C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n \\ C_n^0-C_n^1+C_n^2-\ldots+(-1)^n C_n^n=0 \end{array}\right\}$ - *свойства сумм*

Справедлива формула *бинома Ньютона:* $(a+x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} x^k$

Справедлива также *полиномиальная формула:*

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n=\sum_{\substack{k_1\in N_0,\ldots k_m\in N_0 \\ k_1+\ldots+k_m=n}}^{n} P(k_1,k_2,\ldots,k_m)x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_m^{k_m}$$

$P(k_1,k_2,\ldots,k_m)=\dfrac{(k_1+k_2+\ldots+k_m)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$ - *полиномиальные коэффициенты*

Задание 5.2.1

Найти наибольший член разложения бинома $(a+b)^n$.

Таблица 5.2.1

№	a	b	n	№	a	b	n	№	a	b	n
1	$\sqrt{5}$	3	17	**3**	$\sqrt{5}$	2	13	**5**	$\sqrt{7}$	3	15
2	$\sqrt{3}$	10	17	**4**	3	$\sqrt{6}$	12	**6**	3	$\sqrt{10}$	19

Таблица 5.2.1(окончание)

№	a	b	n	№	a	b	n	№	a	b	n
7	$\sqrt{11}$	4	14	**15**	$\sqrt{5}$	3	10	**23**	$\sqrt{3}$	1,9	18
8	3	$\sqrt{12}$	13	**16**	2,2	$\sqrt{7}$	13	**24**	2,8	$\sqrt{6}$	17
9	$\sqrt{8}$	3	12	**17**	$\sqrt{6}$	2,5	11	**25**	$\sqrt{7}$	2,5	16
10	4	$2\sqrt{3}$	11	**18**	3,5	$\sqrt{11}$	10	**26**	2,3	$\sqrt{8}$	20
11	$\sqrt{13}$	3	13	**19**	$\sqrt{10}$	3,3	13	**27**	$\sqrt{7}$	2,7	18
12	4	$\sqrt{13}$	10	**20**	3,2	$\sqrt{8}$	9	**28**	3,5	$\sqrt{13}$	15
13	$\sqrt{7}$	2,5	21	**21**	$\sqrt{10}$	2,8	15	**29**	$\sqrt{5}$	2,3	17
14	3	$\sqrt{3}$	18	**22**	2,8	$\sqrt{7}$	19	**30**	3,2	$\sqrt{10}$	20

Пример решения задания 5.2.1

Найти наибольший член разложения бинома $(1+\sqrt{3})^{100}$.

Пусть T_k - наибольший член разложения бинома $(1+\sqrt{3})^{100}$, $T_k = C_{100}^k \cdot 1^{100-k} \cdot (\sqrt{3})^k$. Тогда $T_k > T_{k-1}$ и $T_k > T_{k+1}$. Получаем систему неравенств: $\begin{cases} C_{100}^k \cdot (\sqrt{3})^k > C_{100}^{k-1} \cdot (\sqrt{3})^{k-1} \\ C_{100}^k \cdot (\sqrt{3})^k > C_{100}^{k+1} \cdot (\sqrt{3})^{k+1} \end{cases}$, или

$$\begin{cases} \dfrac{100!}{k!(100-k)!} \cdot (\sqrt{3})^k > \dfrac{100!}{(k-1)!(101-k)!} \cdot (\sqrt{3})^{k-1} \\ \dfrac{100!}{k!(100-k)!} \cdot (\sqrt{3})^k > \dfrac{100!}{(k+1)!(99-k)!} \cdot (\sqrt{3})^{k+1} \end{cases}$$

После сокращений имеем: $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{k} > \dfrac{1}{101-k} \\ \dfrac{1}{100-k} > \dfrac{\sqrt{3}}{k+1} \end{cases}$, или

$\begin{cases} (101-k)\sqrt{3} > k \\ k+1 > (100-k)\sqrt{3} \end{cases}$, откуда $\begin{cases} k(1+\sqrt{3}) < 101\sqrt{3} \\ k(1+\sqrt{3}) > 100\sqrt{3} - 1 \end{cases}$, получаем двойное неравенство для k: $\dfrac{100\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} < k < \dfrac{101\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$. Подставляя приближённое значение $\sqrt{3} \approx 1{,}732$, получим: $63{,}135 < k < 64{,}64$.

Единственное целое значение k, удовлетворяющее этому двойному неравенству, равно 64.

Следовательно, наибольший член разложения бинома имеет номер k, равный 64 и $T_{64} = C_{100}^{64} \cdot 1^{100-64} \cdot (\sqrt{3})^{64} = \dfrac{100!}{64! \cdot 36!} 3^{32}$.

Ответ: $\dfrac{100!}{64! \cdot 36!} 3^{32}$.

Задание 5.2.2

Из данной пропорции найти x и y.

Таблица 5.2.2

№	пропорция	№	пропорция
1	$C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^{y} : C_{x+1}^{y-1} = 5:4:2$	**6**	$C_{x}^{y+1} : C_{x}^{y} : C_{x}^{y-1} = 21:14:6$
2	$C_{x}^{y+1} : C_{x}^{y} : C_{x}^{y-1} = 3:3:2$	**7**	$C_{x}^{y+2} : C_{x}^{y+1} : C_{x}^{y} = 3:5:5$
3	$C_{x}^{y+2} : C_{x}^{y+1} : C_{x}^{y} = 42:35:20$	**8**	$C_{x+1}^{y+2} : C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^{y} = 2:4:5$
4	$C_{x+1}^{y+2} : C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^{y} = 3:4:3$	**9**	$C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^{y} : C_{x+1}^{y-1} = 2:3:3$
5	$C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^{y} : C_{x+1}^{y-1} = 4:5:4$	**10**	$C_{x}^{y+1} : C_{x}^{y} : C_{x}^{y-1} = 14:8:3$

Таблица 5.2.2(окончание)

№	пропорция	№	пропорция
11	$C_{x}^{y+2} : C_{x}^{y+1} : C_{x}^{y} = 5:3:1$	**21**	$C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^{y} : C_{x+1}^{y-1} = 15:5:1$
12	$C_{x+1}^{y+2} : C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^{y} = 5:6:5$	**22**	$C_{x}^{y+1} : C_{x}^{y} : C_{x}^{y-1} = 15:24:28$
13	$C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^{y} : C_{x+1}^{y-1} = 14:7:2$	**23**	$C_{x}^{y+2} : C_{x}^{y+1} : C_{x}^{y} = 7:7:5$
14	$C_{x}^{y+1} : C_{x}^{y} : C_{x}^{y-1} = 6:14:21$	**24**	$C_{x+1}^{y+2} : C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^{y} = 6:7:6$
15	$C_{x}^{y+2} : C_{x}^{y+1} : C_{x}^{y} = 24:9:2$	**25**	$C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^{y} : C_{x+1}^{y-1} = 5:5:3$
16	$C_{x+1}^{y+2} : C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^{y} = 28:12:3$	**26**	$C_{x}^{y+1} : C_{x}^{y} : C_{x}^{y-1} = 1:7:21$
17	$C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^{y} : C_{x+1}^{y-1} = 6:3:1$	**27**	$C_{x}^{y+2} : C_{x}^{y+1} : C_{x}^{y} = 42:35:20$
18	$C_{x}^{y+1} : C_{x}^{y} : C_{x}^{y-1} = 72:45:20$	**28**	$C_{x+1}^{y+2} : C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^{y} = 45:20:6$
19	$C_{x}^{y+2} : C_{x}^{y+1} : C_{x}^{y} = 14:10:5$	**29**	$C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^{y} : C_{x+1}^{y-1} = 55:22:6$
20	$C_{x+1}^{y+2} : C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^{y} = 28:24:15$	**30**	$C_{x}^{y+1} : C_{x}^{y} : C_{x}^{y-1} = 3:4:3$

Пример решения задания 5.2.2

Из данной пропорции $C_{x}^{y+1} : C_{x}^{y} : C_{x}^{y-1} = 2:2:1$ *найти* x *и* y.

Записав отдельно отношение первого члена пропорции ко второму и второго к третьему, после сокращения получим:

$$\frac{x!}{(y+1)!(x-y-1)!}:\frac{x!}{y!(x-y)!}=\frac{x-y}{y+1};$$

$$\frac{x!}{y!(x-y)!}:\frac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!}=\frac{x-y+1}{y}.$$

В силу условия задачи мы приходим к системе: $\begin{cases}\dfrac{x-y}{y+1}=1\\ \dfrac{x-y+1}{y}=2\end{cases}$

Решив её, получим: $x=5$, $y=2$. Ответ: $\begin{cases}x=5\\ y=2\end{cases}$

Задание 5.2.3

Вычислить данные суммы

Таблица 5.2.3

№	сумма
1	$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n$
2	$4C_n^2+7C_n^3+10C_n^4+\ldots+(3n-2)C_n^n$
3	$C_n^2+2C_n^3+3C_n^4+\ldots+(n-1)C_n^n$
4	$C_n^0+3C_n^1+5C_n^2+\ldots+(2n-1)C_n^{n-1}$
5	$-2C_n^1+3C_n^2-4C_n^3+\ldots+(-1)^n(n+1)C_n^n$
6	$C_n^1-2C_n^2+3C_n^3-\ldots+(-1)^{n-1}nC_n^n$
7	$3C_n^1+5C_n^2+7C_n^3+\ldots+(2n-1)C_n^{n-1}$
8	$2C_n^1+7C_n^2+12C_n^3+\ldots+(5n-3)C_n^n$

9	$3C_{n+1}^1+7C_{n+1}^2+11C_{n+1}^3+\ldots+(4n-1)C_{n+1}^n$
10	$5C_n^0+8C_n^1+11C_n^2+\ldots+(3n-1)C_n^{n-2}$
11	$C_{n+1}^1+2C_{n+1}^2+3C_{n+1}^3+\ldots+(n+1)C_{n+1}^{n+1}$
12	$C_{n+1}^2+2C_{n+1}^3+3C_{n+1}^4+\ldots+nC_{n+1}^{n+1}$
13	$C_{n-1}^0-2C_{n-1}^1+3C_{n-1}^2-\ldots+(-1)^{n-1}nC_{n-1}^{n-1}$
14	$C_n^2-3C_n^3+5C_n^4-\ldots+(-1)^n(2n-3)C_n^n$

Таблица 5.2.3(окончание)

№	**сумма**
15	$C_n^1+5C_n^2+9C_n^3+\ldots+(4n-3)C_n^n$
16	$4C_{n+1}^2+7C_{n+1}^3+10C_{n+1}^4+\ldots+(3n+1)C_{n+1}^{n+1}$
17	$3C_{n+1}^1+5C_{n+1}^2+7C_{n+1}^3+\ldots+(2n+3)C_{n+1}^{n+1}$
18	$C_{n+1}^1-2C_{n+1}^2+3C_{n+1}^3-\ldots+(-1)^n(n+1)C_{n+1}^{n+1}$
19	$5C_{n+1}^0+8C_{n+1}^1+11C_{n+1}^2+\ldots+(3n+2)C_{n+1}^{n-1}$
20	$C_{n+1}^2-3C_{n+1}^3+5C_{n+1}^4-\ldots+(-1)^{n+1}(2n-1)C_{n+1}^{n+1}$
21	$2C_{n-1}^2+3C_{n-1}^3+4C_{n-1}^4+\ldots+(n-1)C_{n-1}^{n-1}$
22	$2C_{n-1}^1+7C_{n-1}^2+12C_{n-1}^3+\ldots+(5n-8)C_{n-1}^{n-1}$
23	$C_{n-1}^2+2C_{n-1}^3+3C_{n-1}^4+\ldots+(n-2)C_{n-1}^{n-1}$
24	$3C_{n+1}^2-4C_{n+1}^3+5C_{n+1}^4-\ldots+(-1)^n(n+2)C_{n+1}^{n+1}$
25	$4C_n^2-7C_n^3+10C_n^4-\ldots+(-1)^n(3n-2)C_n^n$
26	$5C_{n+1}^2+9C_{n+1}^3+13C_{n+1}^4+\ldots+(4n+1)C_{n+1}^{n+1}$

27	$3C_n^1 - 7C_n^2 + 11C_n^3 - \ldots + (-1)^{n-1}(4n-1)C_n^n$
28	$C_n^2 - 2C_n^3 + 3C_n^4 - \ldots + (-1)^n (n-1)C_n^n$
29	$2C_n^2 + 3C_n^3 + 4C_n^4 + \ldots + (n-1)C_n^{n-1}$
30	$2C_n^2 + 7C_n^3 + 12C_n^4 + \ldots + (5n-8)C_n^n$

Пример 1 решения задания 5.2.3

Вычислить сумму

$$C_{n+2}^1 + 3C_{n+2}^2 + 5C_{n+2}^3 + \ldots + (2n+3)C_{n+2}^{n+2} \qquad (n \geq -1).$$

Обозначим искомую сумму через S. Тогда

$$S - 1 = -1 \cdot C_{n+2}^0 + C_{n+2}^1 + 3C_{n+2}^2 + 5C_{n+2}^3 + \ldots + (2n+3)C_{n+2}^{n+2} \qquad (*)$$

Учитывая свойство $C_n^k = \tilde{N}_n^{n-k}$, можем переписать (*) в виде:

$$S - 1 = (2n+3)C_{n+2}^0 + (2n+1)C_{n+2}^1 + \ldots + C_{n+2}^{n+1} - C_{n+2}^{n+2} \qquad (**)$$

Сложив равенства (*) и (**), получим:

$$2S - 2 = (2n+2)C_{n+2}^0 + (2n+2)C_{n+2}^1 + \ldots + (2n+2)C_{n+2}^{n+1} + (2n+2)C_{n+2}^{n+2},$$

откуда $2(S-1) = (2n+2)(C_{n+2}^0 + C_{n+2}^1 + \ldots + C_{n+2}^{n+2})$..

Разделим обе части равенства на 2 и используем свойство $C_m^0 + C_m^1 + \ldots + C_m^m = 2^m$. Получим: $S - 1 = (n+1) \cdot 2^{n+2}$, откуда $S = (n+1) \cdot 2^{n+2} + 1$.. Ответ: $(n+1) \cdot 2^{n+2} + 1$.

Пример 2 решения задания 5.2.3

Вычислить сумму

$$C_{n+2}^1 - 3C_{n+2}^2 + 5C_{n+2}^3 + \ldots + (-1)^n (2n+3) C_{n+2}^{n+2} \qquad (n \geq -1).$$

Обозначим искомую сумму через S. Тогда

$$S + 1 = C_{n+2}^0 + C_{n+2}^1 - 3C_{n+2}^2 + 5C_{n+2}^3 + \ldots + (-1)^n (2n+3) C_{n+2}^{n+2}.$$

Можно считать, что $S.+1 = f'(1)$, где

$$f'(x) = \frac{C_{n+2}^0}{x^2} + C_{n+2}^1 - 3C_{n+2}^2 x^2 + 5C_{n+2}^3 x^4 - \ldots + (-1)^n (2n+3) C_{n+2}^{n+2} x^{2n+2}.$$

Тогда одна из первообразных для $f'(x)$ будет иметь вид:

$$f(x) = -\frac{C_{n+2}^0}{x} + C_{n+2}^1 x - C_{n+2}^2 x^3 + C_{n+2}^3 x^5 - \ldots + (-1)^n C_{n+2}^{n+2} x^{2n+3},$$

или $f(x) = -\frac{1}{x} \left(C_{n+2}^0 - C_{n+2}^1 x^2 + C_{n+2}^2 x^4 - \ldots + (-1)^{n+2} C_{n+2}^{n+2} x^{2n+4} \right).$

Свернув сумму по формуле бинома Ньютона, получим: $f(x) = -\dfrac{(1-x^2)^{n+2}}{x}$. Тогда $f'(x) = \dfrac{(1-x^2)^{n+1}(2nx^2 + 3x^2 + 1)}{x^2}$.

Если $n = -1$, $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$, $\quad f'(1) = 2.$

Если $n > -1$, $f'(x) = \left. \dfrac{(1-x^2)^{n+1}(2nx^2 + 3x^2 + 1)}{x^2} \right|_{x=1} = 0.$

Учитывая, что $S = f'(1) - 1$, получаем ответ.

Ответ: Если $n = -1$, то $S = 1$, если $n > -1$, то $S = -1$.

Задание 5.2.4

Найти коэффициент при x^k в разложении данного выражения P по полиномиальной формуле, полученный после раскрытия скобок и приведения подобных членов.

Таблица 5.2.4

№	k	P	№	k	P

1	23	$(2+x^2-x^3)^{13}$	**8**	30	$(x^7+3-x^2)^{16}$
2	96	$(1+x^6-x^{10})^{17}$	**9**	18	$(2+x^6-x^2)^9$
3	80	$(4-x^8+x^6)^{14}$	**10**	22	$(3-x^2+x^5)^{12}$
4	130	$(x^7-2+x^5)^{26}$	**11**	112	$(4+x^{18}+x^4)^{28}$
5	66	$(x^7-x^3+3)^{22}$	**12**	46	$(1-x^4+x^6)^{14}$
6	48	$(1+x^7-x^2)^{25}$	**13**	48	$(3+x^5-x^3)^{16}$
7	114	$(3+x^{14}+x^6)^{20}$	**14**	40	$(x^3+3-x^4)^{13}$

Таблица 5.2.4(окончание)

№	k	P	**№**	k	P
15	132	$(2-x^6+x^{14})^{23}$	**23**	56	$(2-x^2+x^9)^{29}$
16	34	$(4+x^2-x^5)^{17}$	**24**	68	$(1+x^{10}-x^4)^{18}$
17	96	$(1+x^4-x^{14})^{24}$	**25**	60	$(2-x^4+x^7)^{16}$
18	57	$(2-x^3+x^7)^{19}$	**26**	17	$(7-x+x^4)^{14}$
19	60	$(1+x^{14}-x^4)^{15}$	**27**	150	$(2-x^5-x^7)^{32}$
20	9	$(5-x-x^3)^{10}$	**28**	120	$(x^{14}+x^8-3)^{15}$
21	44	$(2+x^{10}-x^4)^{11}$	**29**	34	$(x^2-x^8+2)^{15}$
22	27	$(3+x^3+x^9)^9$	**30**	300	$(x^{10}-3+x^{14})^{31}$

Пример решения задания 5.2.4

Найти коэффициент при x^{30} *в разложении выражения* $(3-x^2+x^5)^{19}$ *по полиномиальной формуле, полученный после раскрытия скобок и приведения подобных членов.*

Общий член разложения по полиномиальной формуле имеет вид: $3^m\cdot(-x^2)^n\cdot(x^5)^k\cdot P(m,n,k), \qquad m+n+k=19.$

Для отыскания всех случаев, в которых возникает x^{30}, решаем в целых неотрицательных числах уравнение $2n+5k=30.$

Выразим k: $k = 6 - \dfrac{2n}{5}$. Видно, что k принимает целые значения, если n кратно 5. Выпишем все такие случаи:

$n = 0 \Rightarrow k = 6$; $\quad n = 5 \Rightarrow k = 4$;

$n = 10 \Rightarrow k = 2$; $\quad n = 15 \Rightarrow k = 0$.

Для каждой найденной пары значений n, k значение m находим из уравнения $m + n + k = 19$. Получим 4 набора $(m; n; k)$:

(13;0;6), (10;5;4), (7;10;2), (4;15;0).

Слагаемые, содержащие x^{30}, таковы:

$3^{13} \cdot (-x^2)^0 \cdot (x^5)^6 \cdot P(13,0,6)$; $\quad 3^{10} \cdot (-x^2)^5 \cdot (x^5)^4 \cdot P(10,5,4)$;

$3^7 \cdot (-x^2)^{10} \cdot (x^5)^2 \cdot P(7,10,2)$; $\quad 3^4 \cdot (-x^2)^{15} \cdot (x^5)^0 \cdot P(4,15,0)$.

В итоге, коэффициент при x^{30} имеет вид:

$$19! \cdot \left(\frac{3^{13}}{13!0!6!} - \frac{3^{10}}{10!5!4!} + \frac{3^7}{7!10!2!} - \frac{3^4}{4!15!0!} \right).$$

Ответ: $19! \cdot \left(\dfrac{3^{13}}{13!0!6!} - \dfrac{3^{10}}{10!5!4!} + \dfrac{3^7}{7!10!2!} - \dfrac{3^4}{4!15!0!} \right)$.

5.3. Формула включений и исключений

Пусть имеется N предметов, которые могут обладать свойствами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Обозначим через $N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ количество предметов, обладающих набором свойств $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, а через $N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \ldots, \overline{\alpha_k})$ - количество предметов, не обладающих ни одним из свойств $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Тогда справедлива *формула включений и исключений:*

$$N(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\ldots,\overline{\alpha}_n)=N-N(\alpha_1)-N(\alpha_2)-\ldots-N(\alpha_n)+N(\alpha_1,\alpha_2)+$$

$$+N(\alpha_1,\alpha_3)+\ldots+N(\alpha_{n-1},\alpha_n)-N(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)-\ldots+(-1)^n N(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n).$$

Количество перестановок n различных предметов, при которых ни один предмет не стоит на своём первоначальном месте, выражается числом $D_n=n!-C_n^1(n-1)!+C_n^2(n-2)!-\ldots+(-1)^n C_n^n$ или $D_n=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$.

Количество перестановок n различных предметов, при которых ровно k предметов стоят на своих первоначальных местах, выражается числом $D_{n,k}=C_n^k\cdot D_{n-k}$.

Задание 5.3.1

Сколько натуральных чисел от 1 до 10000 не делится ни на α, ни на β, ни на γ, ни на δ?

Таблица 5.3.1

№	α	β	γ	δ
1	4	5	6	7
2	2	3	4	5
3	3	4	5	8
4	6	7	3	2
5	5	8	9	4
6	3	4	5	6

№	α	β	γ	δ
7	2	4	5	7
8	3	7	6	11
9	11	3	9	10
10	11	8	5	4
11	7	9	5	3
12	8	5	2	9

№	α	β	γ	δ
13	3	8	16	7
14	13	9	5	3
15	3	5	6	13
16	11	8	3	2
17	17	2	3	4
18	2	5	4	17

Таблица 5.3.1(окончание)

№	α	β	γ	δ
19	3	4	6	17
20	13	2	3	4
21	2	5	4	13
22	2	8	5	13

№	α	β	γ	δ
23	11	7	9	3
24	3	6	5	4
25	4	8	19	3
26	19	5	10	2

№	α	β	γ	δ
27	5	6	7	8
28	11	3	9	5
29	12	3	5	19
30	23	2	8	7

Пример решения задания 5.3.1

Сколько натуральных чисел от 1 до 10000 не делится ни на 2, ни на 4, ни на 5, ни на 9 ?

Очевидно, что если число не делится на 2, то оно и подавно не будет делиться на 4. Поэтому число 4 в условии можно просто опустить.

Заметим, что на 2 делится каждое второе натуральное число, на 5 - каждое пятое, на 9 - каждое девятое, на 2 и на 5 - каждое 10-е, и т.д. Воспользуемся формулой включений и исключений, обозначив искомое число через M, а через $[a]$ будем обозначать целую часть числа a. Получим:

$$M = 10000 - \left[\frac{10000}{2}\right] - \left[\frac{10000}{5}\right] - \left[\frac{10000}{9}\right] + \left[\frac{10000}{10}\right] + \left[\frac{10000}{18}\right] +$$

$$+ \left[\frac{10000}{45}\right] - \left[\frac{10000}{90}\right] = 10000 - 5000 - 2000 - 1111 + 1000 + 555 + 222 -$$

$-111 = 3555$. Ответ: 3555 чисел.

Задание 5.3.2

Подсчитать количество различных перестановок цифр данного числа α, при которых никакие n одинаковых цифр не идут друг за другом.

Таблица 5.3.2

№	n	α	№	n	α	№	n	α
1	3	4244522	**6**	3	53233252	**11**	2	5612651
2	2	6858757	**7**	2	383448	**12**	2	7434276
3	2	1249248	**8**	2	78959681	**13**	3	23992921
4	3	32331252	**9**	2	443536	**14**	2	78974894
5	2	46749679	**10**	3	3884383	**15**	3	13341134

Таблица 5.3.2(окончание)

№	n	α	№	n	α	№	n	α
16	2	565262	**21**	2	4954512	**26**	2	52566314
17	2	49129258	**22**	3	37665363	**27**	2	134534
18	2	352366	**23**	2	42535234	**28**	3	9395339
19	3	1887181	**24**	3	17721212	**29**	2	3744753
20	2	6556373	**25**	2	534354	**30**	2	825824

Пример решения задания 5.3.2

Подсчитать количество различных перестановок цифр числа 123132, при которых никакие 2 одинаковые цифры не идут друг за другом

Общее количество различных перестановок цифр числа 123132 равно $P(2,2,2) = \frac{6!}{2!2!2!} = \frac{720}{8} = 90.$

Если две какие-то одинаковые цифры стоят рядом, мы можем считать эту двойную цифру единым символом. Тогда количество перестановок, содержащих этот символ, равно $P(2,2,1) = \frac{5!}{2!2!1!} = \frac{120}{4} = 30.$

Заметим, что количество таких случаев равно $C_3^1 = 3.$

Аналогично, количество перестановок, в которых присутствуют пара двойных символов, равно $P(2,1,1) = \frac{4!}{2!1!1!} = \frac{24}{2} = 12,$ количество таких случаев равно $C_3^2 = 3,$ а общее число перестановок, образованных парами одинаковых цифр, равно $P(1,1,1) = 3! = 6.$

В итоге, применяя формулу включений и исключений, будем иметь:

$90 - 3 \cdot 30 + 3 \cdot 12 - 6 = 30.$

Ответ: 30 перестановок.

Задание 5.3.3

Сколько существует перестановок n различных предметов, при которых на своих первоначальных местах окажутся ровно k или ровно m предметов?

Таблица 5.3.3

№	n	k	m	№	n	k	m	№	n	k	m

1	9	7	3
2	8	6	5
3	7	3	4
4	6	2	3
5	9	6	4
6	8	3	5
7	7	3	5
8	6	3	4
9	9	5	3
10	8	4	2

11	7	2	3
12	6	1	4
13	9	4	2
14	8	2	5
15	7	4	2
16	6	2	1
17	9	5	2
18	8	3	4
19	7	1	3
20	6	3	1

21	9	3	4
22	8	2	6
23	7	2	6
24	6	4	2
25	9	3	5
26	8	4	6
27	7	5	2
28	6	2	5
29	9	6	3
30	8	6	3

Пример решения задания 5.3.3

Сколько существует перестановок 9 различных предметов, при которых на своих первоначальных местах окажутся ровно 2 или ровно 6 предметов?

Количество различных перестановок девяти предметов, при которых на своих первоначальных местах окажутся ровно 2 предмета, равно $D_{9,2}$, а количество различных перестановок девяти предметов, при которых на своих первоначальных местах окажутся ровно 6 предметов, равно $D_{9,6}$. Применяя правило суммы, а также формулу для вычисления $D_{n,k}$, имеем:

$$D_{9,2}+D_{9,6}=C_9^2 D_7+C_9^6 D_3=\frac{9!}{2!7!}7!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}\right)+$$

$$+\frac{9!}{6!3!}3!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)=\frac{9!}{7!2!}\cdot 1854+\frac{9!}{6!3!}\cdot 2=66912.$$

Ответ: 66912 перестановок.

5.4. Задачи о распределениях

Пусть имеется n шаров, которые распределяются по k ящикам. Тогда количество способов распределения для различных случаев равно:

1) шары различимы, ящики различимы, все ящики непусты:

$$U^*(n,k)=\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i C_k^i (k-i)^n;$$

2) шары различимы, ящики различимы, допускаются пустые ящики:

$$U(n,k)=k^n;$$

3) шары различимы, ящики неразличимы, все ящики непусты:

$$V^*(n,k)=\frac{U^*(n,k)}{k!};$$

4) шары различимы, ящики неразличимы, допускаются пустые ящики:

$$V(n,k)=\sum_{i=1}^{k}V^*(n,i);$$

5) шары неразличимы, ящики различимы, все ящики непусты:

$$T^*(n,k)=C_{n-1}^{k-1};$$

6) шары неразличимы, ящики различимы, допускаются пустые ящики:

$$T(n,k)=C_{n+k-1}^{k-1};$$

7) шары неразличимы, ящики неразличимы, все ящики непусты:

$$W^*(n,k)=W(n-k,k);$$

8) шары неразличимы, ящики неразличимы, допускаются пустые ящики:

$$W(n,k)=\sum_{i=1}^{k}W^*(n,i).$$

Последняя пара совместно рекурсивных формул позволяют сводить вычисления количества способов распределения при больших значениях n и k к меньшим значениям этих переменных.

Задание 5.4.1

Сколькими способами можно распределить n различных открыток в k

1) различных;
2) неразличимых конвертов, если:

а) все конверты непусты;

б) допускаются пустые конверты. (Всего рассмотреть 4 случая).

Таблица 5.4.1

№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k	№	n	k
1	11	5	**7**	11	4	**13**	11	3	**19**	11	6	**25**	11	7
2	10	5	**8**	10	4	**14**	10	3	**20**	10	6	**26**	10	7
3	9	5	**9**	9	4	**15**	9	6	**21**	9	3	**27**	9	7
4	8	5	**10**	8	4	**16**	8	6	**22**	8	3	**28**	8	7
5	7	5	**11**	7	4	**17**	7	3	**23**	7	6	**29**	13	3
6	12	4	**12**	12	6	**18**	12	3	**24**	12	7	**30**	12	5

Пример решения задания 5.4.1

Решить задачу 5.4.1 для $n = 6$, $k = 4$.

1б) Если конверты различимы и допускаются пустые конверты, то число способов распределения равно $U(6,4) = 4^6 = 4096;$

1а) если конверты различимы, и все они должны быть непусты, то число способов распределения равно

$$U^*(6,4) = C_4^0 4^6 - C_4^1 3^6 + C_4^2 2^6 - C_4^3 = 4096 - 4 \cdot 729 + 6 \cdot 64 - 4 = 1560;$$

2а) если конверты неразличимы, и все они должны быть непусты, то число способов распределения равно $V^*(6,4) = \dfrac{U^*(6,4)}{4!} = \dfrac{1560}{24} = 65;$

2б) если конверты неразличимы и допускаются пустые конверты, то число способов распределения равно

$$V(6,4) = V^*(6,4) + V^*(6,3) + V^*(6,2) + V^*(6,1) =$$

$$= 65 + \frac{U^*(6,3)}{3!} + \frac{U^*(6,2)}{2!} + U^*(6,1) =$$

$$= 65 + \frac{C_3^0 \cdot 3^6 - C_3^1 \cdot 2^6 + C_3^2 \cdot 1^6}{6} + \frac{C_2^0 \cdot 2^6 - C_2^1}{2} + C_1^0 =$$

$$= 65 + \frac{1 \cdot 729 - 3 \cdot 64 + 3}{6} + \frac{64 - 2}{2} + 1 = 65 + 90 + 31 + 1 = 187.$$

Ответ: а2) 4096; а1) 1560; б1) 65; б2) 187.

Задание 5.4.2

Сколькими способами можно представить число n в виде k

а) неотрицательных

б) положительных целых слагаемых, если представления, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются

1) различными

2) одинаковыми. (Всего рассмотреть 4 варианта)

Таблица 5.4.2

№	n	k	**№**	n	k	**№**	n	k	**№**	n	k	**№**	n	k
1	12	5	**7**	12	4	**13**	12	6	**19**	12	3	**25**	12	7
2	11	5	**8**	11	4	**14**	11	3	**20**	11	6	**26**	11	7
3	10	5	**9**	10	4	**15**	10	3	**21**	10	6	**27**	10	7
4	9	5	**10**	9	4	**16**	9	6	**22**	9	3	**28**	9	7
5	8	5	**11**	8	4	**17**	8	6	**23**	8	3	**29**	8	7
6	7	5	**12**	7	4	**18**	7	3	**24**	7	6	**30**	13	3

Пример решения задания 5.4.2

Решить задачу 5.4.2 для $n = 13$, $k = 4$.

Данная задача равносильна задаче распределения 13 неразличимых шаров (т.е. единиц, образующих число 13) по 4 ящикам (4 слагаемым).

1а) Если слагаемые неотрицательны, а представления, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются различными, то количество различных способов представления числа 13 в виде суммы 4 слагаемых равно $T(13,4) = C_{13+4-1}^{4-1} = C_{16}^{3} = \dfrac{16!}{3!13!} = 560.$

1б) Если слагаемые положительны, а представления, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются различными, то количество различных способов представления числа 13 в виде суммы 4 слагаемых равно $T^*(13,4) = C_{13-1}^{4-1} = C_{12}^{3} = \dfrac{12!}{3!9!} = 220.$

2а), 2б). Для нахождения количества различных способов представления числа 13 виде суммы 4 слагаемых, если представления, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются различными, нуж-

Таблица 5.4.2а

$n \backslash k$	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1 1	1 0	1 0	1 0
2	1 1	2 1	2 0	2 0
3	1 1	2 1	3 1	3 0
4	1 1	3 2	4 1	5 1
5	1 1	3 2	5 2	6 1
6	1 1	4 3	7 3	9 2
7	1 1	4 3	8 4	11 3
8	1 1	5 4	10 5	15 5
9	1 1	5 4	12 7	18 6
10	1 1	6 5	14 8	23 9
11	1 1	6 5	16 10	27 11
12	1 1	7 6	19 2	34 15
13	1 1	7 6	21 14	39 18

но найти числа $W(13,4)$ и для случаев неотрицательных и положительных слагаемых соответственно. Заметим, что $W*(n,1)=W(n,1)=1$; если $n=k$, то $W*(n,k)=1$;

если $n<k$, то $W*(n,k)=0$, значит,

$W*(1,2)=W*(1,3)=W*(1,4)=0$;

$W(1,2)=W*(1,2)+W*(1,1)=0+1=1$, аналогично, $W(1,3)=W(1,4)=1$.

$W*(2,1)=W*(2,2)=1$; $W*(2,3)=W*(2,4)=0$;

$W(2,2)=W*(2,1)+W*(2,2)=1+1=2$;

$W(2,3)=W*(2,1)+W*(2,2)+W*(2,3)= \quad =1+1+0=2$; аналогично, $W(2,4)=2$;

$W*(3,2)=W(3-2,2)=W(1,2)=1$. Продолжим вычисление коэффициентов $W(n,k)$ и $W*(n,k)$, заполним таблицу, в левом верхнем углу каждой клетки будем писать значение $W(n,k)$, а в правом нижнем углу – $W*(n,k)$. Получим таблицу 5.4.2а. Как видно из таблицы, $W*(13,4)=18$, $W(13,4)=39$. Ответ: 1а) 560; 1б) 220; 2а) 39; 2б) 18.

5.5. Арифметический треугольник

Коэффициентами обобщённого арифметического треугольника называются числа, которые определяются так:

$$C_m(1,k)=\begin{cases}1, & \textit{если } k\le m-1;\\ 0, & \textit{если } k>m-1.\end{cases}$$

Если $n>1$, то

$$C_m(n,k)=\begin{cases}C_m(n-1,k)+C_m(n-1,k-1)+...+C_m(n-1,0), & \textit{если } k\le m-1;\\ C_m(n-1,k)+C_m(n-1,k-1)+...+C_m(n-1,k-m+1), & \textit{если } k>m-1.\end{cases}$$

Теорема: Число $C_m(n,k)$ равно количеству n- разрядных чисел в m-ичной системе счисления, сумма цифр которых равна k (если допускаются числа, начинающиеся с 0).

Свойства коэффициентов обобщённого арифметического треугольника:

1) $C_2(n,k) = C_n^k$;

2) $C_m(n,k) = C_m(n,(m-1)n-k)$ (свойство симметричности);

3) $C_m(n,0) + C_m(n,1) + ... + C_m(n,(m-1)n) = m^n$ (свойство суммы).

Задание 5.5.1

Наносятся m цифр 1,2,.., m на m различных шаров (на каждый шар пишем ровно одну цифру), после чего шары помещаем в мешок. Из мешка наудачу извлекаем шар, записываем число, изображённое на нём и возвращаем шар в мешок. Эта процедура повторяется n раз.
Сколько существует различных случаев, при которых сумма выписанных чисел оказалась бы равной k?

Таблица 5.5.1

№	m	n	k	№	m	n	k	№	m	n	k
1	13	4	21	**11**	4	7	18	**21**	6	5	15
2	11	4	20	**12**	13	4	20	**22**	4	7	19
3	9	5	21	**13**	11	4	19	**23**	13	4	19
4	7	5	22	**14**	9	5	22	**24**	11	4	21
5	5	6	19	**15**	7	5	21	**25**	9	5	20
6	3	9	18	**16**	5	6	18	**26**	7	5	20
7	12	4	21	**17**	3	9	17	**27**	5	6	17
8	10	5	16	**18**	12	4	20	**28**	3	9	16
9	8	5	21	**19**	10	5	15	**29**	12	4	19
10	6	5	16	**20**	8	5	22	**30**	19	5	14

Пример решения задания 5.5.1

Решить задачу 5.5.1 для $m = 8$, $n = 4$, $k = 21$.

Перейдём от шаров, помеченных цифрами 1,2,...,8 к шарам, помеченным цифрами 0,1,2,...,7. Тогда сумме 21, полученной "старыми" метками, будет соответствовать сумма, образованная "новыми" метками, которая равна 21 – 4 = 17. Тогда каждой "новой" записи будет соответствовать некоторое 4-х значное число в 8-ичной системе счисления, причём некоторые числа могут начинаться и с нулей. Общее количество 4-х разрядных чисел в 8-ичной системе счисления, сумма цифр которых равна 17, выражается коэффициентом $C_8(4{,}17)$.

По свойству симметричности, $C_8(4{,}17) = C_8(4{,}7 \cdot 4 - 17) = C_8(4{,}11)$. Найдём коэффициент $C_8(4{,}11)$, построив арифметический треугольник 8 порядка (табл. 5.5.1а):

Таблица 5.5.1а

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	3	4	5	6	7	8	7	6	5	4
3	1	3	6	10	15	21	28	36	42	46	48	48
4												284

$C_8(4{,}11) = 15 + 21 + 28 + 36 + 42 + 46 + 48 + 48 = 284.$

<u>Ответ:</u> 284 случая.

Задание 5.5.2

Игральная кость бросается n раз. Во сколько раз число способов набора суммы в p очков превышает число способов набора суммы в k очков?

Таблица 5.5.2

№	n	p	k	№	n	p	k	№	n	p	k
1	5	18	20	**11**	5	19	15	**21**	5	16	24
2	5	19	21	**12**	4	12	21	**22**	5	13	24
3	5	16	14	**13**	5	14	22	**23**	5	18	15
4	4	17	18	**14**	5	15	21	**24**	4	17	10
5	5	17	15	**15**	5	13	23	**25**	5	19	12
6	5	21	13	**16**	4	15	12	**26**	5	20	14

7	5	19	11		**17**	5	14	23		**27**	5	16	24
8	4	15	23		**18**	5	15	24		**28**	4	15	21
9	5	15	23		**19**	5	16	20		**29**	5	17	23
10	5	20	13		**20**	4	16	11		**30**	5	18	13

Пример решения задания 5.5.2

Решить задачу 5.5.2 для $n = 4,\ p = 13,\ k = 17.$

Перейдём от кости, грани которой помечены символами 1,2,...,6 к кости, грани которой помечены цифрами 0,1,...,5. Тогда суммам в 13 и 17 очков, полученным с помощью обычной кости, будут соответствовать суммы в 13 – 4 = 9 и 17 – 4 = 13 очков, полученные с помощью кости с нестандартной разметкой. Но результаты бросаний нестандартной кости, выписанные подряд, можно воспринимать, как четырёхзначное число в шестеричной системе счисления.

Количества четырёхзначных чисел в шестеричной системе счисления, с суммами цифр 9 и 13 равны соответственно $C_6(4,9)$ и $C_6(4,13)$. Заметим, что $C_6(4,13) = C_6(4,5\cdot 4 - 13)) = C_6(4,7).$ Для нахождения этих чисел построим обобщенный арифметический треугольник шестого порядка (табл.5.5.2а). Видим, что $C_6(4,7) = 104,\ \ C_6(4,9) = 140.$

Таблица 5.5.2а

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2
3	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25
4								104		140

$\dfrac{140}{104} = \dfrac{35}{26} \approx 1{,}346.$ Ответ: В 1,346 раза.

Задание 5.5.3

Запускается n волчков, у каждого из которых по m граней с нанесёнными на них числами $p, p+1, \ldots, p+m-1$. Сколькими способами эти волчки могут упасть, набрав сумму в k очков, если волчки

1) различимы? 2) неразличимы?

Если число способов не превосходит 10, выписать их.

Таблица 5.5.3

№	n	m	p	k	**№**	n	m	p	k	**№**	n	m	p	k
1	7	3	2	24	**11**	4	5	4	25	**21**	5	3	5	32
2	5	4	3	26	**12**	5	7	2	23	**22**	5	4	2	22
3	5	5	5	20	**13**	7	3	3	30	**23**	5	5	4	34
4	5	7	2	21	**14**	4	4	6	33	**24**	5	7	2	24
5	6	3	2	21	**15**	5	5	2	22	**25**	8	3	2	27
6	5	4	4	30	**16**	4	7	3	26	**26**	5	4	5	30
7	5	5	5	26	**17**	6	3	3	28	**27**	5	5	5	39
8	5	7	3	27	**18**	5	4	3	25	**28**	5	7	3	24
9	5	3	4	26	**19**	5	5	3	28	**29**	7	3	3	29
10	5	4	3	24	**20**	5	7	3	25	**30**	5	4	5	36

Пример решения задания 5.5.3

Запускается 4 волчка, у каждого из которых по 4 грани с нанесёнными на них числами 5,6,7,8. Сколькими способами эти волчки могут упасть, набрав сумму в 25 очков, если волчки

1) различимы ? 2) неразличимы ?

Перейдём от данных волчков к волчкам, грани которых помечены цифрами 0,1,2,3. Тогда сумме 13, полученной с помощью исходных волчков, будет соответствовать сумма $25-5\cdot 4=5$ для "новых" волчков. В дальнейшем будем говорить только о волчках с новой разметкой. Рассмотрим случаи:

1) волчки различимы.

В этом случае каждому способу набора волчками суммы в 5 очков соответствует четырёхзначное число в четверичной системе счисления, сумма цифр которого равна 5, и количество таких чисел равно $C_4(4,5)$. Для нахождения этих чисел построим обобщенный арифметический треугольник четвёртого порядка (табл.5.5.3а):

Таблица 5.5.3а

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	0	0
2	1	2	3	4	3	2
3	1	3	6	10	12	12
4						40

Как видим, $C_4(4,5) = 40$.

2) волчки неразличимы.

В этом случае введём функцию $f_m(n,k)$, где $f_m(n,k)$ - количество способов набора суммы k на n волчках, если m - максимальное выпавшее величина баллов.

Очевидно, что справедливо рекуррентная формула

$$f_m(n,k) = f_{m-1}(n,k) + f_{m-1}(n-1,k-m) + f_{m-1}(n-2,k-2m) + \ldots f_{m-1}(n-t,k-tm),$$

где $t = \left[\dfrac{k}{m}\right]$. Для нашего случая будем иметь:

$f_3(4,5) = f_2(4,5) + f_2(3,2)$.

$f_2(4,5) = f_1(4,5) + f_1(3,3) + f_1(2,1) = 0 + 1 + 1 = 2$.

$f_2(3,2) = f_1(3,2) + f_1(2,0) = 1 + 1 = 2$.

В итоге получим: $f_3(4,5) = f_2(4,5) + f_2(3,2) = 2 + 2 = 4$.

Выпишем 4 возможные комбинации:

0+0+2+3 , 0+1+1+3, 0+1+2+2, 1+1+1+2.

Ответ: 1) 40 способов; 2) 4 способа.

Задание 5.5.4

Сколькими способами можно оплатить марками бандероль на сумму k рублей, если есть неограниченное число марок достоинством в a, b, c рублей и два способа, отличающиеся только порядком наклейки марок, считаются 1) различными ? 2) одинаковыми ?

Если число способов не превосходит 10, выписать их в явном виде.

Таблица 5.5.4

№	k	a	b	c
1	25	3	5	7
2	25	6	5	2
3	25	4	3	6
4	25	2	5	7
5	25	3	4	7
6	25	8	3	2
7	24	3	5	7
8	24	6	5	2
9	24	3	4	6
10	24	2	5	7
11	24	3	4	7
12	24	8	3	2
13	26	3	7	5
14	26	2	5	6
15	26	4	3	6
16	26	5	2	7
17	26	4	7	3
18	26	2	3	8
19	23	3	5	7
20	23	5	6	2
21	23	4	6	3
22	23	2	7	5
23	23	7	3	4
24	23	3	8	2
25	27	5	3	7
26	27	2	6	5
27	27	3	4	6
28	27	7	2	5
29	27	7	4	3
30	27	8	3	2

Пример решения задания 5.5.4

Решим задание 5.5.4 для $k = 20$, $a = 6$, $b = 5$, $c = 3$.

1) Пусть $f(k)$ означает число способов, которыми можно оплатить сумму в k рублей марками достоинством в 6, 5 и 3 рубля, если есть неограниченное число марок достоинством в 6, 5, 3 рубля и два способа, отличающиеся только порядком наклейки марок, считаются различными. Тогда справедлива рекуррентная формула

$$f(k) = f(k-6) + f(k-5) + f(k-3).$$

Эта формула позволяет вычислять значения функции в точке k через значения функции в точках $k-6$, $k-5$, $k-3$.

Очевидно, что при $k < 0$ $f(k) = 0$. Далее, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, $f(3) = 1$, $f(4) = 0$, $f(5) = 1$, $f(6) = 2$,

$f(7) = f(1) + f(2) + f(4) = 0 + 0 + 0 = 0;$

$f(8) = f(2) + f(3) + f(5) = 0 + 1 + 1 = 2;$

$f(9) = f(3) + f(4) + f(6) = 1 + 0 + 2 = 3;$

$f(10) = f(4) + f(5) + f(7) = 0 + 1 + 0 = 1;$

$f(11) = f(5) + f(6) + f(8) = 1 + 2 + 2 = 5;$

$f(12) = f(6) + f(7) + f(9) = 2 + 0 + 3 = 5;$

$f(14) = f(8) + f(9) + f(11) = 2 + 3 + 5 = 10;$

$f(15) = f(9) + f(10) + f(12) = 3 + 1 + 5 = 9;$

$f(17) = f(11) + f(12) + f(14) = 5 + 5 + 10 = 20;$

$f(20) = f(14) + f(15) + f(17) = 10 + 9 + 20 = 39.$

Итак, $f(20) = 39$.

2) Пусть $g(k; n_1, n_2, ..., n_p)$ означает число способов, которыми можно оплатить сумму в k рублей марками достоинством в $n_1, n_2, ..., n_p$ рублей, если есть неограниченное число марок каждого достоинства и два способа, отличающиеся только порядком наклейки марок, считаются одинаковыми.

Для нашего случая справедлива рекуррентная формула:

$$g(20;6,5,3) = g(20;5,3) + g(14;5,3) + g(8;5,3) + g(2;5,3)$$

Первое слагаемое в правой части этой формулы соответствует случаю, когда 6-рублёвые марки не участвует в оплате суммы, второе - когда ровно одна 6-рублёвая марка участвует в оплате суммы и т.д.

Очевидно, что $g(2;5,3) = 0$, а для каждого из остальных слагаемых составим рекуррентную формулу:

$$g(20;5,3) = g(20;3) + g(15;3) + g(10;3) + g(5;3) + g(0;3);$$

$$g(14;5,3) = g(14;3) + g(9;3) + g(4;3); \ g(8;5,3) = g(8;3) + g(3;3).$$

Понятно, что $g(k;n) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \text{ кратно } n; \\ 0, & \text{если } k \text{ не кратно } n. \end{cases}$

Поэтому имеем: $g(20;5,3) = 0 + 1 + 0 + 0 + 1 = 2;$ $g(14;5,3) = 0 + 1 + 0 = 1;$

$g(8;5,3) = 0 + 1 = 1;$ $g(20;6,5,3) = 2 + 1 + 1 + 0 = 4.$

Выпишем соответствующие представления:

20 = 5 + 5 + 5 + 5;

20 = 6 + 6 + 5 + 3;

20 = 6 + 5 + 3 + 3 + 3;

20 = 5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3.

Ответ: 1) 39 способов; 2) 4 способа.

5.6. Рекуррентные соотношения

Рекуррентным соотношением k *– го порядка* называется формула, позволяющая выражать значения члена последовательности с номером n $(n > k)$ через члены этой последовательности с номерами $n-1,\ n-2, \ldots,\ n-k$.

Решением рекуррентного соотношения называется числовая последовательность, обращающая его в верное равенство при подстановке в него формулы общего члена последовательности.

Начальными условиями рекуррентного соотношения k - го порядка называются первые k членов последовательности, являющейся решением данного рекуррентного соотношения.

Линейным рекуррентным соотношением k *- го порядка с постоянными коэффициентами* называется соотношение вида

$$f(n+k) = a_1 \cdot f(n+k-1) + a_2 \cdot f(n+k-2) + \ldots + a_k \cdot f(n) \qquad (*)$$

Общим решением соотношения $(*)$ называется такое его решение, которое содержит k произвольных постоянных, путём подбора которых можно удовлетворить любым начальным условиям.

Характеристическим уравнением соотношения $(*)$ называется уравнение

$$x^k = a_1 \cdot x^{k-1} + a_2 \cdot x^{k-2} + \ldots + a_k \qquad (**)$$

Теорема: Общее решение соотношения $(*)$ имеет вид:

$f(n) = A_1 + A_2 + \ldots + A_p$, где

$A_i = C_i x^n$, если x - действительный корень первой кратности уравнения $(**)$, где C_i - произвольные постоянные.

$A_i = x^n \cdot (C_{i,1} + nC_{i,1} + n^2 C_{i,3} + \ldots + n^{m-1} C_{i,m})$,

если x - действительный корень кратности m уравнения $(**)$, где $C_{i,1}, C_{i,2}, \ldots, C_{i,m}$ - произвольные постоянные;

$A_i = r^n(\cos\ n\varphi \cdot D_i + \sin\ n\varphi \cdot E_i)$, если $r(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$ - комплексно-сопряжённая пара, каждый член которой является корнем первой кратности уравнения (**) и D_i, E_i - произвольные постоянные;

$$A_i = r^n(\cos\ n\varphi \cdot (D_{i,1} + nD_{i,2} + n^2 D_{i,3} + \ldots + n^{m-1} D_{i,m}) +$$

$$+ \sin\ n\varphi \cdot (E_{i,1} + nE_{i,2} + n^2 E_{i,3} + \ldots + n^{m-1} E_{i,m})),$$

если $r(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$ - комплексно-сопряжённая пара, каждый член которой является корнем кратности m уравнения (**) и $D_{i,1}, D_{i,2}, \ldots, D_{i,m}$, $E_{i,1}, E_{i,2}, \ldots, E_{i,m}$ - произвольные постоянные.

Задание 5.6.1

Найти общее решение рекуррентного соотношения 5-го порядка $f(n+5) = a \cdot f(n+4) + b \cdot f(n+3) + c \cdot f(n+2) + d \cdot f(n+1) + e \cdot f(n)$.

Таблица 5.6.1

№	a	b	c	d	e
1	2	10	–8	–33	–18
2	–11	–30	22	95	–75
3	2	6	–4	–13	–6
4	9	–26	20	24	–32
5	3	5	–27	32	–12
6	6	–11	2	12	–8
7	7	–7	–19	16	20
8	15	–83	205	–216	80
9	5	–2	–14	3	9
10	5	–4	–16	32	–16
11	–2	9	22	–4	–24
12	–2	11	40	44	16
13	–6	–6	16	15	–18
14	1	14	–6	–45	–27
15	2	17	–70	92	–40

№	a	b	c	d	e
16	–1	11	29	26	8
17	0	18	–4	–57	–36
18	4	3	–34	52	–24
19	2	11	–40	44	–16
20	–2	10	8	–33	18
21	–6	–6	20	39	18
22	–4	3	34	52	24
23	3	13	–11	–24	20
24	6	–6	–20	39	–18
25	4	0	–14	17	–6
26	–6	–5	16	12	–16
27	0	19	–34	–12	40
28	8	–12	–2	13	-6
29	11	–23	47	24	36
30	7	5	–35	–4	28

Пример решения задания 5.6.1

Найти общее решение рекуррентного соотношения 5-го порядка

$f(n+5) = 4\cdot f(n+4) - 4\cdot f(n+3) - 2\cdot f(n+2) + 5\cdot f(n+1) - 2\cdot f(n).$

Запишем характеристическое уравнение данного соотношения:

$$x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $x_1 = 1$ - корень характеристического уравнения.

Понизим степень уравнения, поделив характеристический многочлен на $x-1$ по схеме Горнера:

	1	–4	4	2	–5	2
1	1	–3	1	3	–2	0

В результате деления получили уравнение четвёртой степени:

$$x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0.$$

Заметим, что $x_2 = 1$ является корнем и этого уравнения, разделим левую часть уравнения на $x-1$:

	1	–3	1	3	–2
1	1	–2	–1	2	0

Получено уравнение $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0,$ которое также имеет $x_3 = 1$ своим корнем. Понижаем степень уравнения:

	1	–2	–1	2
1	1	–1	–2	0

В результате имеем квадратное уравнение $x^2 - x - 2 = 0$, которое имеет корни $x_4 = -1$ и $x_5 = 2$.

По теореме о виде общего решения линейного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами, запишем общее решение:

$$f(n) = 1^n \cdot (C_1 + nC_2 + n^2 C_3) + (-1)^n C_4 + C_5 \cdot 2^n =$$

$$= C_1 + nC_2 + n^2 C_3 + (-1)^n C_4 + C_5 \cdot 2^n.$$

Ответ: $f(n) = C_1 + nC_2 + n^2 C_3 + (-1)^n C_4 + C_5 \cdot 2^n.$

Задание 5.6.2

Найти общее решение рекуррентного соотношения 5-го порядка

$$f(n+5) = a \cdot f(n+4) + b \cdot f(n+3) + c \cdot f(n+2) + d \cdot f(n+1) + e \cdot f(n).$$

Таблица 5.6.2

№	a	b	c	d	e
1	2	–2	8	–16	16
2	$2\sqrt{3}$	–4	–3	$6\sqrt{3}$	–12
3	2	–4	–4	8	–16
4	–2	–2	5	10	10
5	$-2\sqrt{3}$	–4	–6	$-12\sqrt{3}$	-24
6	–2	–4	–1	–2	-4
7	4	–8	–5	20	–40
8	$4\sqrt{3}$	–16	2	$-8\sqrt{3}$	32
9	4	–16	3	–12	48
10	–4	–8	–2	–8	–16
11	$-4\sqrt{3}$	–16	4	$16\sqrt{3}$	64
12	–4	–16	6	24	96
13	2	–2	–8	16	–16
14	$2\sqrt{3}$	–4	27	$-54\sqrt{3}$	108
15	2	–4	1	–2	4
16	2	–2	5	–10	10
17	$2\sqrt{3}$	–4	–6	$12\sqrt{3}$	–24
18	2	–4	7	–14	28
19	–2	–2	–8	–16	–16
20	$-2\sqrt{3}$	–4	3	$6\sqrt{3}$	12
21	–2	–4	–27	–54	–108
22	4	–8	–1	4	-8
23	$4\sqrt{3}$	–16	4	$-16\sqrt{3}$	64
24	4	–16	2	–8	32
25	–4	–8	–3	–12	–24
26	$-4\sqrt{3}$	–16	1	$4\sqrt{3}$	16
27	–4	–16	–10	–40	–160
28	–2	–2	–1	–2	–2
29	$-2\sqrt{3}$	–4	3	$6\sqrt{3}$	12
30	–2	–4	–5	–10	–20

Пример решения задания 5.6.2

Найти общее решение рекуррентного соотношения 5-го порядка $f(n+5)=2\sqrt{3}\cdot f(n+4)-4\cdot f(n+3)-2\cdot f(n+2)+4\sqrt{3}f(n+1)-8f(n).$

Запишем характеристическое уравнение данного соотношения: $x^5-2\sqrt{3}x^4+4x^3+2x^2-4\sqrt{3}x+8=0.$

С помощью группировки разложим левую часть на множители: $x^3(x^2-2\sqrt{3}x+4)+2(x^2-2\sqrt{3}x+4)=0,$ или

$(x^3+2)(x^2-2\sqrt{3}x+4)=0.$

Рассмотрим два случая:

1) $x^3+2=0 \Rightarrow x^3=-2 \Rightarrow x^3=2\cdot e^{\frac{i(\pi+2\pi k)}{3}},\ k\in Z.$

Если $k=3n+1,$ то $x=-\sqrt[3]{2},$ при $k=3n$ и $k=3n-1$ получаем пару комплексно-сопряжённых чисел с модулями, равными $\sqrt[3]{2}$ и аргументами $\varphi=\pm\dfrac{\pi}{3}$.

Соответствующие слагаемые в общем решении будут иметь вид:

$$C_1\left(-\sqrt[3]{2}\right)^n+\left(\sqrt{2}\right)^n\left(C_2\cos\frac{\pi n}{3}+C_3\sin\frac{\pi n}{3}\right)$$

.

2) $x^2-2\sqrt{3}x+4=0 \Rightarrow x_{4,5}=\sqrt{3}\pm i$.

Изобразим число $\sqrt{3}+i$ на комплексной плоскости для нахождения его модуля и аргумента:

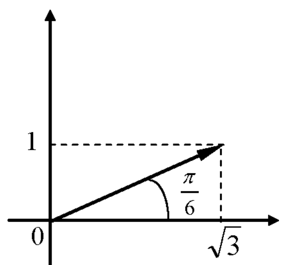


Рис.2.6.2

Видим, что $r=2,\quad \varphi=\dfrac{\pi}{6}.$

Соответствующие слагаемые в общем решении будут иметь вид: $2^n\left(C_4\cos\dfrac{\pi n}{6}+C_5\sin\dfrac{\pi n}{6}\right).$ В итоге получаем общее решение исходного рекуррентного соотношения.

Ответ:

$$f(n) = C_1 \left(\sqrt[3]{2}\right)^n + \left(\sqrt{2}\right)^n \left(C_2 \cos\frac{\pi n}{3} + C_3 \sin\frac{\pi n}{3} \right) + 2^n \left(C_4 \cos\frac{\pi n}{6} + C_5 \sin\frac{\pi n}{6} \right).$$

Задание 5.6.3

Найти общий вид решения рекуррентного соотношения 4-го порядка $x_{n+4} + ax_{n+3} + bx_{n+2} + cx_{n+1} + dx_n = 0,$ если $x_0 = 0$.

Таблица 5.6.3

№	a	b	c	d
1	$-6-2\sqrt{3}$	$13+12\sqrt{3}$	$-24-18\sqrt{3}$	36
2	–3	4	0	–8
3	1	–12	–26	–24
4	$2\sqrt{3}$	3	$-2\sqrt{3}$	–4
5	4	5	2	–12
6	–5	–2	14	–20
7	$-4-2\sqrt{3}$	$7+8\sqrt{3}$	$-16-6\sqrt{3}$	12
8	–4	–27	62	–140
9	1	–30	–62	–60
10	$4+2\sqrt{3}$	$8+8\sqrt{3}$	$16+8\sqrt{3}$	16
11	–4	1	–6	36
12	1	–22	42	–36
13	$-2-2\sqrt{3}$	$5+4\sqrt{3}$	$-8-2\sqrt{3}$	4
14	–7	0	8	–56
15	–6	–23	–34	–18
16	$-3+2\sqrt{3}$	$6-6\sqrt{3}$	$-12+4\sqrt{3}$	8
17	–4	1	–6	36
18	–4	- 9	26	–30
19	$-4-2\sqrt{3}$	$8+8\sqrt{3}$	$-16-8\sqrt{3}$	16
20	–1	–4	16	–24

21	11	38	54	36
22	$3+2\sqrt{3}$	$6+6\sqrt{3}$	$12+4\sqrt{3}$	8
23	1	–28	–64	–120
24	–7	–2	18	–28

Таблица 5.6.3(окончание)

№	*a*	*b*	*c*	*d*
25	$-3-2\sqrt{3}$	$6\sqrt{3}$	$-12+8\sqrt{3}$	–16
26	0	–8	24	–32
27	– 5	–30	–50	–36
28	$-4+2\sqrt{3}$	$7-8\sqrt{3}$	$-16+6\sqrt{3}$	12
29	4	9	10	4
30	–8	23	–30	18

Пример решения задания 5.6.3

Найти общий вид решения рекуррентного соотношения 4-го порядка $x_{n+4}-3x_{n+3}-8x_{n+1}+24=0$, *если* $x_0=0$.

Запишем характеристическое уравнение данного соотношения:

$x^4-3x^3-8x+24=0$.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $x_1=2$ - корень характеристического уравнения.

Понизим степень уравнения, поделив характеристический многочлен на $x-2$ по схеме Горнера:

	1	–3	0	–8	24
2	1	–1	–2	–12	0

В результате деления получили уравнение третьей степени:

$$x^3-x^2-2x-12=0.$$

Заметим, что $x_2 = 3$ является корнем этого уравнения, разделим левую часть уравнения на $x - 3$:

	1	–1	–2	–12
3	1	2	4	0

Получено уравнение $x^2 + 2x + 4 = 0$, которое имеет корни

$x_{3,4} = -1 \pm i\sqrt{3}$.

Комплексное число $-1 + i\sqrt{3}$ имеет модуль $r = 2$ и аргумент $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

Запишем общее решение исходного рекуррентного соотношения:

$$x_n = C_1 2^n + C_2 3^n + 2^n\left(C_3 \cos\frac{2\pi n}{3} + C_4 \sin\frac{2\pi n}{3}\right).$$

Учтём начальное условие $x_0 = 0$:

$0 = C_1 2^0 + C_2 3^0 + 2^0 (C_3 \cos 0 + C_4 \sin 0)$, откуда $C_1 = -C_2 - C_3$. .

Подставляя выражение для в формулу общего решения, получим ответ.

Ответ: $x_n = (-C_2 - C_3)\cdot 2^n + C_2 3^n + 2^n\left(C_3 \cos\frac{2\pi n}{3} + C_4 \sin\frac{2\pi n}{3}\right)$.

Задание 5.6.4

Найти общее решение рекуррентного соотношения 4-го порядка

$$f(n+4) = \alpha\cdot f(n+3) + \beta\cdot f(n+2) + \gamma\cdot f(n+1) + \delta\cdot f(n)$$

с заданными начальными условиями $f(0),\ f(1),\ f(2),\ f(3)$.

Таблица 5.6.4

№	α	β	γ	δ	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$
1	5	–1	–21	18	3	8	8	38
2	–1	7	13	6	1	6	1	44
3	–6	0	22	–15	5	–4	19	–54
4	3	3	–7	–6	3	–3	12	–3
5	7	–12	–4	16	4	–3	–1	–19

6	1	7	–13	6	3	3	4	7
7	4	–3	–4	4	0	–3	3	3
8	5	3	–13	–10	3	3	0	15
9	11	–39	49	–20	2	0	–11	–58
10	6	–8	–6	9	1	3	17	51

Таблица 5.6.4(окончание)

№	α	β	γ	δ	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$
11	3	2	–12	8	6	7	7	3
12	0	9	4	–12	5	–3	19	–37
13	–1	12	28	16	–2	–1	9	–29
14	–7	–13	3	18	2	1	7	–17
15	2	12	–18	–27	4	2	4	50
16	0	17	–36	20	4	3	–1	–13
17	0	11	18	8	1	3	–8	15
18	–3	9	23	12	3	4	21	50
19	2	7	–20	12	1	2	2	–2
20	0	11	–18	8	4	1	–1	–1
21	–3	7	15	–18	6	3	17	–15
22	–5	–1	21	18	2	3	–3	33
23	–2	7	20	12	3	–6	14	–34
24	2	15	4	–20	4	3	–1	19
25	6	–8	–6	9	4	0	20	48
26	4	–3	–4	4	–2	3	–13	–25
27	5	12	–44	–80	4	–4	36	16
28	2	3	–8	4	0	5	–16	19
29	3	–1	–3	2	–1	–6	–3	–22
30	–1	7	13	6	2	1	–6	15

Пример решения задания 5.6.4

Найти решение рекуррентного соотношения 4-го порядка $f(n+4)=6\cdot f(n+2)+8\cdot f(n+1)+3\cdot f(n)$ с начальными условиями $f(0)=0;\ \ f(1)=-6;\ \ f(2)=-4;\ \ f(3)=-34.$

Запишем характеристическое уравнение данного соотношения:

$x^4 - 6x^2 - 8x - 3 = 0.$ Подстановкой убеждаемся, что $x_1 = -1$ - корень характеристического уравнения. Понизим степень уравнения, поделив характеристический многочлен на $x+1$ по схеме Горнера:

	1	0	–6	–8	–3
–1	1	–1	–5	–3	0

В результате деления получили уравнение третьей степени:

$x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0.$

Заметим, что $x_2 = -1$ также является корнем этого уравнения, разделим левую часть уравнения на $x+1$:

	1	–1	–5	–3
–1	1	–2	–3	0

Получено уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0,$ которое имеет корни

$x_3 = -1,\ \ x_4 = 3.$

Общее решение исходного соотношения имеет вид:

$f(n) = (-1)^n (A + Bn + Cn^2) + D3^n.$

Учтём начальные условия, получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} A \qquad\qquad\qquad + D = -34 \\ -A \ \ - B \ \ - C \ \ + 3D = \ -6 \\ A + 2B + 4C \ \ \ + 9D = \ -4 \\ -A - 3B - 9C + 27D = -34 \end{cases}.$$

Решив эту систему, будем иметь: $A = 1,\ \ B = 2,\ C = 0,\ D = -1.$

Подставив найденные значения констант в формулу общего решения, получим: $f(n) = (-1)^n (1 + 2n + 0 \cdot n^2) - 1 \cdot 3^n.$

Ответ: $f(n) = (-1)^n (1 + 2n) - 3^n.$

Глава 6. Конечные автоматы

6.1. Автоматы Мили

Автоматом Мили будем называть пятерку объектов $S=(A,Q,V,\delta,\lambda)$,

где $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ - *входной алфавит*;

$Q=\{q_1,\dots,q_m\}$ - *множество внутренних состояний;*

$V=\{v_1,\dots,v_k\}$ - *выходной алфавит;*

$\delta: A\times Q\rightarrow Q$ - *функция переходов;*

$\lambda: A\times Q\rightarrow V$ - *функция выхода.*

Таблица, задающая функции переходов и выхода, называется *таблицей состояний автомата.*

Диаграммой состояний автомата Мили называется ориентированный граф, в котором количество вершин равно количеству состояний данного автомата Мили и помечено символами внутренних состояний; дуга, выходящая из любой вершины q_i и заходящая в вершину q_j, помечена символами a_t, v_r, причём $\delta(a_t,q_i)=q_j$, $\lambda(a_t,q_i)=v_r$.

Автомат Мили называется *инициальным*, если он всегда начинает свою работу из одного и того же состояния (q_1).

Автомат Мили называется *неинициальным*, если он может начинать свою работу из любого своего состояния.

Работа автомата Мили связана с двумя бесконечными лентами, разбитыми на ячейки, причём в каждой ячейке может быть записан один символ некоторого алфавита.

Работа автомата Мили над словом α, записанным на входной ленте, проходит следующим образом:

1) считав символ в ячейке входной ленты, обозреваемой считывающим устройством автомата Мили, он печатает в ячейку выходной ленты символ, найденный с помощью функции выхода ν, двигается вдоль лент вправо и переходит в состояние, определяемое с помощью функции перехода δ;

2) работа автомата продолжается до тех пор, пока все ячейки, содержащие символы данного слова, не будут пройдены.

Тактом времени называют промежуток, за который конечный автомат обрабатывает одну ячейку.

Дешифратором называется инициальный конечный автомат, выходным алфавитом которого является множество $\{0,1\}$, причём на вход подаётся бесконечная последовательность символов некоторого алфавита и символ 1 печатается в том и лишь в том случае, если в данный момент времени считывающее устройство автомата обозревает последний символ уже считанного слова α, фиксированного для данного автомата, а на ленте записано слово, в которое входит α. Слово α называется *кодовой комбинацией* этого автомата.

Неинициальный автомат называется *сильно связным*, если для любых состояний автомата q_i и q_j найдётся слово α такое, что автомат, начавший работу в состоянии q_i при считывании слова α переходит в состояние q_j.

Состояния q_i и q_k неинициальных автоматов A_1 и A_2 называются *эквивалентными*, если для любого слова α, составленного из букв входного алфавита, выходные слова, полученные при работе автоматов A_1 и A_2, запущенных соответственно из состояний q_i и q_k над словом α, равны.

Автоматы A_1 и A_2 называются *эквивалентными*, если для любого состояния q_i автомата A_1 найдётся эквивалентное ему состояние q_k автомата A_2, а также, если для любого состояния q_k^* автомата A_2 найдётся эквивалентное ему состояние q_i^* автомата A_1.

Автомат A_{min} называется *минимальным* для автомата A, если он является эквивалентным автомату A и содержит наименьшее число внутренних состояний среди всех автоматов, эквивалентных автомату A.

Задание 6.1.1

По данной кодовой комбинации α построить дешифратор с входным алфавитом $\{x, y\}$ и записать его: 1) диаграммой состояний;

2) таблицей состояний.

Таблица 6.1.1

№	α	№	α	№	α
1	$x\,x\,y\,x\,x\,y\,y\,x$	**11**	$y\,y\,x\,y\,y\,x\,x\,x$	**21**	$y\,x\,x\,y\,y\,x\,x\,y$
2	$y\,x\,y\,x\,x\,y\,x\,y$	**12**	$x\,y\,y\,y\,x\,x\,y\,y$	**22**	$y\,y\,y\,y\,x\,y\,x\,y$
3	$y\,x\,y\,y\,x\,x\,y\,x$	**13**	$y\,y\,x\,x\,y\,y\,y\,x$	**23**	$x\,y\,y\,y\,x\,y\,x\,x$
4	$x\,y\,x\,x\,x\,y\,x\,y$	**14**	$x\,y\,x\,x\,y\,y\,x\,y$	**24**	$y\,x\,y\,x\,y\,x\,y\,x$
5	$x\,x\,x\,y\,x\,x\,y\,x$	**15**	$y\,y\,y\,x\,x\,x\,y\,y$	**25**	$x\,y\,y\,x\,y\,x\,x\,x$
6	$y\,x\,y\,y\,y\,x\,x\,x$	**16**	$x\,y\,x\,y\,y\,x\,y\,x$	**26**	$x\,x\,y\,y\,x\,y\,y\,y$
7	$x\,y\,y\,x\,y\,y\,x\,y$	**17**	$y\,x\,x\,y\,x\,y\,y\,y$	**27**	$y\,y\,y\,x\,y\,y\,x\,x$
8	$y\,x\,y\,y\,y\,y\,x\,x$	**18**	$x\,x\,x\,y\,y\,y\,x\,y$	**28**	$x\,x\,x\,y\,y\,x\,y\,x$
9	$x\,y\,y\,y\,x\,y\,x\,y$	**19**	$y\,x\,y\,y\,x\,x\,y\,x$	**29**	$y\,y\,y\,x\,x\,x\,x\,y$
10	$y\,x\,y\,y\,y\,x\,x\,y$	**20**	$x\,y\,y\,x\,x\,y\,y\,x$	**30**	$y\,x\,y\,x\,x\,x\,y\,x$

<u>Пример решения задания 6.1.1</u>

Решим задание 6.1.1 для $\alpha = x\,y\,y\,x\,y\,y\,x\,x$.

Составим диаграмму состояний дешифратора, содержащего 8 внутренних состояний (по количеству символов кодовой комбинации).

Пусть начальное состояние - q_1. Определим $\lambda(x, q_8) = 1$, для остальных случаев значение функции выходов равно 0.

Функцию переходов зададим следующим образом:

$\delta(x, q_1) = q_2$, $\delta(y, q_1) = q_1$. В дальнейшем, если $x_1 x_2 ... x_k$ $(k \neq 8)$ - начало кодовой комбинации, то $\delta(x_k, q_k) = q_{k+1}$, в остальных случаях

$\delta(x_k, q_k) = q_p$, где p - наименьший номер, такой, что слово $x_p x_{p+1} \dots x_k$ является начальным отрезком кодовой комбинации.

Получаем: $\delta(y, q_1) = q_1$, $\delta(x, q_1) = q_2$, $\delta(y, q_2) = q_3$, $\delta(x, q_2) = q_2$, т.к. в слове xx последний символ может служить началом кодовой комбинации, а при получении одного символа кода мы переходим во 2 состояние.

Далее имеем: $\delta(y, q_3) = q_4$, $\delta(x, q_3) = q_2$, т.к. в слове xyx последний символ может служить началом кодовой комбинации, а при получении одного символа кода мы переходим во 2 состояние.

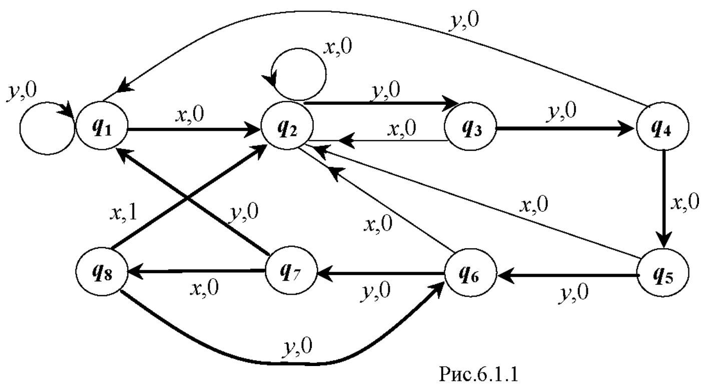


Рис.6.1.1

Найдя, действуя аналогично, значения функции переходов на остальных наборах переменных, получим диаграмму состояний (рис. 6.1.1а):

Теперь запишем таблицу состояний дешифратора:

Таблица 6.1.1а

$A \backslash Q$	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8
x	$q_2, 0$	$q_2, 0$	$q_2, 0$	$q_5, 0$	$q_2, 0$	$q_2, 0$	$q_8, 0$	$q_2, 1$
y	$q_1, 0$	$q_3, 0$	$q_4, 0$	$q_1, 0$	$q_6, 0$	$q_7, 0$	$q_1, 0$	$q_6, 0$

Задание полностью выполнено.

Задание 6.1.2

Для данного конечного автомата, заданного таблично, со множеством внутренних состояний $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, входным алфавитом $\{a,b\}$ и выходным алфавитом $\{x,y\}$.

1. Выяснить, является ли автомат сильно связным.

2. Построить эквивалентный минимальный автомат.

3. Проверить работу исходного и минимального автоматов над словом $"abbabaab"$.

Таблица 6.1.2

№ 1

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$4,x$	$3,y$	$7,x$	$5,x$	$8,x$	$7,x$	$2,y$	$5,x$	$2,y$
b	$7,y$	$4,y$	$9,x$	$9,y$	$7,y$	$9,y$	$8,x$	$9,y$	$5,x$

№ 2

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$2,x$	$6,y$	$8,y$	$7,y$	$4,y$	$3,x$	$4,x$	$2,x$	$3,y$
b	$5,y$	$9,x$	$9,x$	$5,x$	$6,x$	$7,y$	$8,y$	$6,y$	$8,x$

№ 3

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$2,x$	$1,x$	$3,y$	$5,x$	$4,x$	$8,x$	$3,y$	$6,x$	$3,y$
b	$3,x$	$4,x$	$1,x$	$2,x$	$3,x$	$3,x$	$8,y$	$8,x$	$4,y$

№ 4

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$5,x$	$3,y$	$7,x$	$8,x$	$1,y$	$9,x$	$4,y$	$3,y$	$4,y$
b	$8,y$	$6,x$	$5,y$	$7,y$	$7,y$	$1,y$	$8,y$	$5,y$	$6,x$

№ 5

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$3,x$	$8,x$	$4,x$	$1,x$	$8,x$	$7,y$	$6,y$	$9,y$	$9,y$
b	$2,x$	$5,x$	$5,x$	$5,x$	$2,x$	$8,y$	$8,y$	$8,x$	$8,y$

№ 6

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$2,y$	$4,y$	$9,y$	$5,y$	$4,y$	$7,y$	$9,y$	$3,y$	$8,x$
b	$7,y$	$3,y$	$2,y$	$3,y$	$7,y$	$9,x$	$4,y$	$9,x$	$9,y$

№ 7

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$2,x$	$4,x$	$2,x$	$2,x$	$9,x$	$9,y$	$8,x$	$7,x$	$7,x$
b	$3,x$	$6,x$	$1,x$	$3,y$	$3,y$	$7,x$	$1,y$	$6,x$	$6,x$

Таблица 6.1.2(продолжение)

№ 8

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$2,x$	$4,x$	$4,x$	$3,x$	$6,y$	$7,x$	$6,x$	$7,x$	$7,x$
b	$5,x$	$3,x$	$2,x$	$5,y$	$6,y$	$5,y$	$7,x$	$5,x$	$5,x$

№ 9

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$2,x$	$3,x$	$4,x$	$5,x$	$4,x$	$4,x$	$8,x$	$5,x$	$8,x$
b	$1,y$	$7,y$	$3,y$	$7,y$	$5,y$	$7,x$	$6,x$	$9,y$	$9,x$

№ 10

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$2,x$	$1,x$	$4,x$	$5,x$	$4,y$	$7,x$	$6,y$	$6,x$	$6,x$
b	$3,x$	$3,x$	$5,x$	$6,y$	$9,y$	$4,y$	$8,y$	$7,x$	$5,x$

№ 11

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$2,x$	$7,x$	$7,x$	$3,x$	$3,x$	$5,x$	$6,y$	$4,x$	$1,x$
b	$1,x$	$3,x$	$2,x$	$5,x$	$4,x$	$7,y$	$7,y$	$7,y$	$7,y$

№ 12

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$2,y$	$6,y$	$5,y$	$4,x$	$6,y$	$8,x$	$8,y$	$9,y$	$8,x$
b	$9,y$	$3,y$	$6,y$	$3,x$	$3,y$	$4,y$	$6,y$	$7,y$	$4,x$

№ 13

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$2,x$	$4,x$	$2,x$	$2,x$	$9,x$	$9,y$	$8,x$	$7,x$	$7,x$
b	$3,x$	$6,x$	$1,x$	$3,y$	$3,y$	$7,x$	$1,y$	$6,x$	$6,x$

№ 14

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$3,y$	$2,y$	$1,y$	$5,x$	$5,y$	$7,y$	$7,y$	$8,y$	$5,y$
b	$7,y$	$3,x$	$7,y$	$4,x$	$6,y$	$5,y$	$3,y$	$9,y$	$8,y$

Таблица 6.1.2(продолжение)

№ 15

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$2,x$	$4,x$	$4,x$	$3,x$	$5,y$	$7,x$	$6,x$	$7,x$	$7,x$
b	$1,x$	$5,x$	$5,x$	$5,y$	$6,y$	$5,y$	$5,x$	$9,x$	$8,x$

№ 16

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$1,y$	$1,y$	$4,y$	$3,y$	$6,x$	$5,y$	$8,y$	$7,x$	$4,y$
b	$2,x$	$5,x$	$2,x$	$9,x$	$8,x$	$2,y$	$9,y$	$5,x$	$8,x$

№ 17

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$4,x$	$5,x$	$3,x$	$9,x$	$3,y$	$6,x$	$6,y$	$7,x$	$9,x$
b	$2,x$	$2,x$	$5,y$	$2,x$	$8,y$	$7,y$	$8,y$	$2,x$	$8,x$

№ 18

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$2,y$	$1,y$	$2,y$	$5,x$	$3,y$	$6,x$	$8,y$	$7,y$	$5,y$
b	$1,y$	$4,y$	$3,y$	$4,y$	$4,y$	$9,x$	$4,y$	$9,y$	$8,y$

№ 19

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$1,x$	$3,x$	$2,x$	$6,x$	$5,x$	$4,y$	$7,x$	$9,x$	$8,y$

b	$2,x$	$9,x$	$6,x$	$5,y$	$6,x$	$5,x$	$5,x$	$3,y$	$3,x$

№ 20

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$2,y$	$1,y$	$6,y$	$4,y$	$7,y$	$3,y$	$7,x$	$7,y$	$7,y$
b	$3,y$	$3,y$	$2,x$	$6,y$	$5,y$	$4,x$	$8,x$	$9,y$	$8,y$

№ 21

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$1,x$	$3,x$	$2,x$	$3,y$	$6,x$	$5,x$	$7,x$	$9,x$	$8,x$
b	$2,y$	$7,x$	$5,x$	$4,x$	$4,x$	$4,x$	$4,x$	$7,x$	$6,x$

Таблица 6.1.2(продолжение)

№ 22

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$1,x$	$3,y$	$4,y$	$3,y$	$2,y$	$9,y$	$7,y$	$9,y$	$7,y$
b	$2,x$	$5,y$	$5,x$	$5,x$	$4,x$	$4,x$	$8,x$	$7,x$	$8,y$

№ 23

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$2,x$	$1,x$	$4,x$	$4,x$	$5,x$	$7,x$	$6,x$	$7,x$	$9,y$
b	$4,x$	$4,x$	$2,y$	$4,x$	$6,x$	$6,x$	$6,x$	$5,y$	$8,y$

№ 24

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$2,x$	$1,y$	$5,x$	$2,x$	$6,x$	$5,x$	$9,x$	$9,x$	$8,y$
b	$1,y$	$3,x$	$4,x$	$2,x$	$4,x$	$7,x$	$6,x$	$8,y$	$6,x$

№ 25

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$2,x$	$5,y$	$2,x$	$9,x$	$4,x$	$6,x$	$4,x$	$3,x$	$8,y$
b	$8,y$	$6,y$	$5,y$	$5,y$	$7,y$	$1,y$	$8,y$	$7,y$	$6,y$

№ 26

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9

a	$3,x$	$3,y$	$1,x$	$4,x$	$1,y$	$9,y$	$4,y$	$3,y$	$4,y$
b	$8,y$	$6,x$	$5,y$	$7,y$	$7,y$	$1,y$	$8,y$	$5,y$	$6,x$

№ 27

A\Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$2,x$	$5,x$	$7,x$	$9,x$	$6,y$	$4,x$	$6,y$	$3,y$	$1,y$
b	$8,y$	$7,y$	$9,y$	$5,y$	$1,y$	$8,y$	$6,y$	$9,x$	$6,y$

№ 28

A\Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$2,y$	$6,y$	$7,y$	$3,x$	$2,x$	$5,x$	$4,x$	$5,x$	$3,y$
b	$9,y$	$5,x$	$4,x$	$1,y$	$9,y$	$7,y$	$8,y$	$6,y$	$1,y$

Таблица 6.1.2(окончание)

№ 29

A\Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$4,x$	$7,x$	$1,x$	$2,y$	$2,x$	$7,x$	$6,y$	$9,x$	$8,y$
b	$2,x$	$1,x$	$5,x$	$7,y$	$3,x$	$6,x$	$9,y$	$8,x$	$7,y$

№ 30

A\Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$2,x$	$1,x$	$5,x$	$7,x$	$3,x$	$5,x$	$8,x$	$9,x$	$4,x$
b	$3,x$	$5,y$	$1,y$	$9,x$	$2,x$	$1,y$	$4,y$	$7,x$	$8,y$

Пример решения задания 6.1.2

Решим задание 6.1.2 для автомата, заданного таблицей состояний:

Таблица 6.1.2а

A\Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$5,x$	$3,y$	$7,x$	$5,x$	$6,y$	$9,x$	$6,y$	$4,y$	$1,y$
b	$2,y$	$1,x$	$9,y$	$8,y$	$7,x$	$5,y$	$5,x$	$3,x$	$4,x$

1. Выясним, является ли автомат сильно связным. Для этого изобразим диаграмму состояний данного автомата, опуская пометки дуг и объеди-

няя пары противоположно направленных дуг, соединяющих одинаковые вершины графа. Получим:

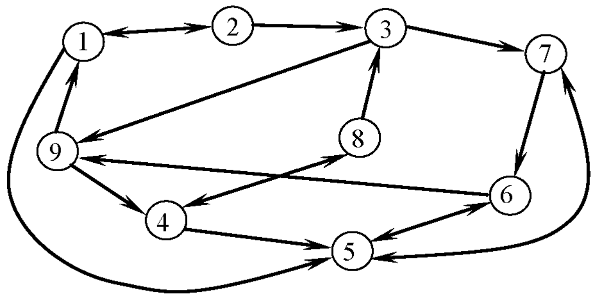


Рис.6.1.2

Построим в полученном графе циклический маршрут:

$$1\to2\to3\to7\to6\to5\to7\to6\to9\to4\to8\to3\to9\to1$$

Из возможности построения такого маршрута следует, что из любого состояния автомата достижимо любое состояние этого же автомата, то есть автомат является сильно связным.

2. Для построения минимального эквивалентного автомата выявим все пары эквивалентных состояний данного автомата. Для этого построим треугольную таблицу, где каждой паре различных состояний соответствует одна клетка. Ели для какой-нибудь пары состояний одному значению входного сигнала соответствуют различные выходные символы, следовательно, эта пара состояний не является эквивалентной, и в соответствующую клетку мы ставим крест.   Получим (табл.6.1.2b):

Таблица 6.1.2b

2	X					
3		X				
4		X				
5	X		X	X		
6		X			X	
	X		X	X		X
	X		X	X		X
	X		X	X		X

7								
8								
9								
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

Далее, в незачеркнутые клетки выписываем пары состояний, в которые переходит автомат из состояний, соответствующих этой клетке, при подаче на вход одинаковых входных символов.

Из этого правила записи есть два исключения:

1) не выписываем пары одинаковых состояний;

2) не выписываем пару, соответствующую заполняемой клетке.

Будем иметь (табл. 6.1.2c):

Таблица 6.1.2c

2	X							
3	5 7 2 9	X						
4	2 8	X	5 7 8 9					
5	X	3 6 1 7	X	X				
6	5 9 2 5	X	7 9 5 9	5 8 5 9	X			
7	X	3 6 1 5	X	X		X		
8	X	3 4 1 3	X	X	4 6 3 7	X	4 6 3 5	
9	X	1 3 1 4	X	X	1 6 4 7	X	1 6 4 5	1 4 3 4
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

Затем, если внутри какой-нибудь клетки выписана пара, соответствующая зачёркнутой ранее клетке, то клетка с этой парой также зачёркивается. Окончательно имеем (табл. 6.1.2.d):

Таблица 6.1.2d

2	X							
3	5 7 2 9	X						
4	2 8	X	5 7 8 9					
5	X	~~3 6~~ ~~1 7~~	X	X				
6	~~5 9~~ ~~2 5~~	X	~~7 9~~ ~~5 9~~	~~5 8~~ ~~5 9~~	X			
7	X	~~3 6~~ ~~1 5~~	X	X		X		
8	X	3 4 1 3	X	X	~~4 6~~ ~~3 7~~	X	~~4 6~~ ~~3 5~~	
9	X	1 3 1 4	X	X	~~1 6~~ ~~4 7~~	X	~~1 6~~ ~~4 5~~	1 4 3 4
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

Здесь каждой незачёркнутой клетке соответствует пара эквивалентных состояний, которые мы объединяем в классы эквивалентности:

$1' = \{1,3,4\}$; $2' = \{2,8,9\}$; $3' = \{5,7\}$; $4' = \{6\}$.

Строим минимальный автомат с четырьмя внутренними состояниями $1'$, $2'$, $3'$, $4'$.

Для построения таблицы состояний минимального автомата поступаем следующим образом: чтобы найти значение функций перехода и выхода, например, на наборе $(a,1')$, выбираем из класса эквивалентности $1'$ любого представителя. Пусть это будет состояние 3. Из таблицы состояний исходного автомата мы имеем, что $\lambda(a,3) = x$, значит, определим также функцию выхода минимального автомата: $\lambda(a,1') = x$. Из таблицы состояний исходного автомата имеем, что $\delta(a,3) = 7$. Но $7 \in \{5,7\} = 3'$, значит, будем считать, что $\delta(a,3) = 3'$.

Найдя значения функций перехода и выхода на всех наборах переменных, заполним таблицу состояний минимального автомата (табл. 6.1.2е):

Таблица 6.1.2е

A \ Q'	1'	2'	3'	4'

a	$3',x$	$1',y$	$4',y$	$2',x$
b	$2',y$	$1',x$	$3',x$	$3',y$

3. Проверим работу исходного автомата над словом $abbabaab$. Пусть исходный автомат начинает свою работу, например, из 1 состояния:

Входное слово		*a*	*b*	*b*	*a*	*b*	*a*	*a*	*b*
Состояния	1	5	7	5	6	5	6	9	4
Выходное слово		*x*	*x*	*x*	*y*	*y*	*y*	*x*	*x*

Так как $1 \in \{1,3,4\} = 1'$, то минимальный автомат запускаем из состояния $1'$. Получим:

	a	*b*	*b*	*a*	*b*	*a*	*a*	*b*
1'	3'	3'	3'	4'	3'	4'	2'	1'
	x	*x*	*x*	*y*	*y*	*y*	*x*	*x*

Как мы видим, результатом работы исходного и минимального автоматов над словом $abbabaab$ является одно и то же слово *xxxyyyxx*

6.2. Частичные автоматы

Автомат Мили называется *частичным автоматом*, если хотя бы одна из функций перехода или выхода не является всюду определённой.

Говорят, что слово α *применимо к состоянию* q_i неинициального автомата, если функция переходов автомата, начавшего работу в состоянии q_i над словом α, может быть неопределена лишь после считывания последнего символа слова α.

Будем рассматривать слова одинаковой длины в алфавите, содержащем *неопределённый символ* “ - ”.

Слово α *покрывает* слово β, если слово β может быть получено из α заменой некоторого множества (может быть, пустого) символов неопределёнными символами.

Слово α *совместимо* со словом β, если существует слово γ, покрывающее как слово α, так и слово β.

Через $S(\alpha, q)$ будем обозначать выходное слово, полученное в результате работы над словом α неинициального автомата S, запущенного из состояния q. Если на некотором наборе аргументов значение выходной функции не определено, то в соответствующей позиции выходного слова ставим неопределённый символ.

Состояние q' автомата S' *покрывает состояние* q автомата S, если любое слово α, применимое к состоянию q, будет также применимо к состоянию q', причём $S'(\alpha, q')$ будет покрывать $S(\alpha, q)$.

Частичный *автомат* S' *покрывает автомат* S, если для любого состояния q автомата S найдётся покрывающее его состояние q' автомата S'.

Автомат, покрывающий частичный автомат S и имеющий наименьшее возможное число внутренних состояний среди всех автоматов, покрывающих S, называется *минимальным* для S.

Состояния q и q' частичного автомата S называются *совместимыми*, если для любого слова α, применимого к состояниям q и q', слова $S'(\alpha, q')$ и $S(\alpha, q)$ будут совместимы.

Множество попарно совместимых состояний автомата называется *группой совместимости* этого автомата.

Группа совместимости называется *максимальной*, если при добавлении в неё любого состояния, она перестаёт быть группой совместимости.

Класс групп совместимости автомата S называется *группировкой*, если любое состояние автомата S попадает хотя бы в одну группу совместимости.

Группировка, состоящая из всех максимальных групп совместимости данного автомата, называется *максимальной группировкой* данного автомата.

Группировка называется *замкнутой*, если для любой группы совместимости Q_v этой группировки, для любого символа входного алфавита a и для любых состояний q и q' из группы совместимости Q_v, либо хотя бы одно из значений $\delta(\alpha, q')$ и $\delta(\alpha, q)$ не определено, либо $\delta(\alpha, q')$ и $\delta(\alpha, q)$ определены и из того, что $\delta(\alpha, q)$ принадлежит некоторой группе совместимости Q_w следует, что и $\delta(\alpha, q')$ также принадлежит Q_w.

Задание 6.2.1

Для слов a, b, c, d:

1. Указать пары (x, y) такие, что x покрывает y.
2. Указать все пары совместимых слов.
3. Указать все пары несовместимых слов.
4. Найти слово e, не попавшее в множество $\{a, b, c, d\}$ такое, что e покрывает не менее двух слов из множества $\{a, b, c, d\}$.

Таблица 6.2.1

№	a	b	c	d
1	-10--0-1---0	1-0--11-10-0	-101-0- -11-0	--01-0--11-0
2	1---01---1--	---11-1--100	---00-1--10	1--0011--101
3	-01101--10-1	--1-0---10--	--1-0---01--	-011-1---0-1
4	01-1-1-01-01	-1-1---0--0-	01---1--1-0-	01-1---001--
5	-1--01----01	0--1-1--1-0-	01-101-11-01	--101---1-0-

Таблица 6.2.1(окончание)

№	a	b	c	d
6	0--1--1-00--	-1-1--1---1-	-1---01--10-	01-1--1-0011
7	--0-1--0--0-	-10-11-0-100	0--0-0-1--11	-1--1--0--00
8	01-1-0-10-11	-1-1--0---10	---11-0-1--0	-1-11-0-1010
9	01--01----1-	---11--0-010	---10-1---10	01-101----10

10	10--101-011-	-0--10--01--	1---1-1-1-1-	1---1-1-0-1-
11	---0--101-0-	0--1-010---1	--11--1-1-0-	0-11-0101-01
12	--1-01--1--	--1-010-110-	--1--10-01--	--1--10-1-0-
13	-01---1-0-0-	1---1--00110	-010--1-0001	-0-0--1-0--1
14	-1-010-0-011	-1-01--0--11	0--01--1--1-	---0-0-0--11
15	1--01---00-1	1-1011--00-1	--10-1--00--	--1000---0-1
16	-01---0-1--1	-01---0-1101	10--1-1---01	--1---0-1-0-
17	1--0---1-1-1	--10--0-10--	-1-0--01-0--	-110--0110-1
18	10-10-10-1--	--1-0-10-01-	10--0-1--1--	-0-1--10-1--
19	-1-011-01--1	-1-01--0---1	-1-0-0--10-0	---0-1-0---1
20	-1--0--01--1	10--0-1-1-0-	-0--0--01-0-	10--0-101-01
21	01---1-00---	01--1---10--	0-1-0--0-1--	011-01-001--
22	010--01-1-00	-10--10-1--0	-10--0--1-0-	01---01-1--0
23	---01---10-1	1--01---00--	11-011--00-1	-1-0-1--00-1
24	-10--0--10--	--0-11--1-1-	-10-10--101-	--0-10---01-
25	0-1110--01-0	0--11---0---	-1-00--10--0	--11-0--01--
26	0----111---0	0--1-111-0-0	-01--101-0-0	---1-1-1-0--
27	10-10--011-1	101--01-10-0	1--10--01--1	-0-10----1-1
28	10--0-10-1-1	0--10--011-0	-0-1--1--1-1	10-10-1011-1
29	111--001-101	--11--00---1	11---0-1-10-	111-1101-001
30	1--00--0---0	11-00-101-10	-1-0--1--11-	111-0-000-10

Пример решения задания 6.1.2

Решим задание 6.1.2 для $a =$ 101- 01 - 0; $b =$ 11- - 1- 0 - ;

$c =$ - 0 - - 0- - 0; $d =$ 1-1- -1- 0.

1. Слово a покрывает слово c, т.к. если первую, третью и шестую единицы слова a заменить неопределённым символом “-”, то получим слово c.

Слово a покрывает слово d, т.к. если второй и пятый символ слова a заменить неопределённым символом “-”, то получим слово d.

2. Совместимыми парами слов будут пары $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{c,d\}$, т.к. для каждой из этих пар слово a покрывает каждое слово этой пары.

Совместимой является также пара $\{b,d\}$, т.к. существует слово $f =$ 111-1100, покрывающее как слово b, так и слово d.

3. Парами несовместимых слов являются пары $\{a,b\}$ и $\{c,b\}$, т.к. слова a и c имеют вторым символом 0, а слово b имеет на втором месте 1.

4. Примером слова e может быть слово 101101-0, которое покрывает слова a,c и d.

Задание 6.2.2

Для частичного неинициального автомата, заданного таблично, со множеством внутренних состояний $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, входным алфавитом $\{a,b\}$ и выходным алфавитом $\{x,y\}$:

1. Найти слово α длины не меньшей 7, такое, что α применимо к некоторому состоянию q, но любое слово, полученное из α приписыванием справа одной буквы, не применимо к q.

2. Построить максимальную группировку.

3. Построить покрывающий автомат на основе максимальной группировки.

4. Построить покрывающий автомат с помощью T - алгоритма, убедиться, что каждый класс совместимости попадает в некоторый максимальный класс совместимости группировки, построенной в п.2.

5. Проверить работу построенных различных автоматов над словом α из п.1.

Таблица 6.2.2

№ 1

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$2,-$	$-,x$	—	$2,-$	$-,x$	$9,y$	$8,x$	$7,x$	$-,x$
b	$-,x$	$6,-$	$1,x$	$-,y$	$3,y$	$-,x$	$-,y$	—	$6,-$

Таблица 6.2.2 (продолжение)

№ 2

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9

a	2,–	$4,x$	4,–	$3,x$	$6,y$	$–,x$	$–,x$	$7,x$	—
b	—	$–,x$	2,–	$–,y$	$6,y$	5,–	$–,x$	5,–	$–,x$

№ 3

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$2,x$	$–,x$	4,–	$–,x$	—	$4,x$	$8,x$	$5,y$	$–,x$
b	$–,y$	$7,y$	3,–	7,–	$5,y$	$–,x$	6,–	$9,y$	$9,x$

№ 4

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	—	1,–	$4,x$	5,–	$4,y$	$7,x$	$6,y$	$–,x$	6,–
b	$3,x$	$–,x$	5,–	$–,y$	9,–	$–,y$	$8,y$	$7,x$	—

№ 5

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$2,x$	7,–	—	3,–	$–,x$	$5,x$	$6,y$	4,–	$1,x$
b	$–,x$	3,–	$2,x$	$–,x$	$4,x$	$7,y$	7,–	—	$7,y$

№ 6

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$2,y$	6,–	—	$4,x$	$6,y$	$–,x$	9,–	$8,y$	$–,x$
b	$–,y$	$3,y$	6,–	$3,x$	$3,y$	$6,y$	—	6,–	$4,y$

№ 7

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$2,x$	—	$–,x$	$7,x$	8,–	$7,x$	$6,y$	—	$8,x$
b	5,–	$6,x$	4,–	$–,y$	$4,y$	$–,x$	8,–	$7,y$	9,–

№ 8

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$3,y$	2,–	$–,y$	$5,x$	$5,y$	—	7,–	$8,y$	$5,y$
b	—	$3,x$	$7,y$	4,–	$6,y$	5,–	$3,y$	9,–	8,–

Таблица 6.2.2 (продолжение)

№ 9

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$2,-$	—	$4,-$	$3,x$	$5,y$	$-,x$	$6,-$	$7,x$	$-,x$
b	$1,x$	$5,x$	$-,x$	$5,y$	$-,y$	$5,y$	$5,x$	$9,-$	$8,x$

№ 10

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$1,-$	$-,y$	—	$3,y$	$6,x$	$5,-$	$8,y$	$7,x$	—
b	$2,x$	$5,-$	$2,x$	$9,x$	$-,x$	$2,y$	—	$5,-$	$8,x$

№ 11

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$4,x$	$5,-$	$3,x$	$9,-$	$3,y$	$6,x$	$-,y$	$7,x$	$9,-$
b	—	$2,x$	$-,y$	$-,x$	$8,-$	$7,y$	—	$2,-$	$8,x$

№ 12

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$2,y$	$1,-$	$2,y$	$-,x$	$3,y$	$6,x$	$8,y$	$-,y$	$5,-$
b	—	$4,y$	$3,-$	$4,-$	—	$9,x$	$4,-$	$9,y$	$8,y$

№ 13

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$1,-$	$3,x$	$2,-$	$-,x$	$5,-$	$-,y$	$7,x$	$9,-$	$8,y$
b	$2,x$	—	$6,x$	$5,y$	$6,-$	$5,x$	—	$3,y$	$-,x$

№ 14

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$2,y$	$-,y$	$6,-$	$4,-$	$7,y$	$3,y$	$7,x$	$-,y$	$7,-$
b	$3,-$	$-,y$	$2,x$	—	$6,-$	—	$8,x$	$9,y$	$8,y$

№ 15

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$1,x$	$3,-$	$2,x$	$-,y$	$6,x$	—	$7,-$	$9,x$	—
b	$-,y$	$7,x$	—	$4,x$	$4,-$	$4,x$	$4,-$	$7,-$	$6,x$

Таблица 6.2.2 (продолжение)

№ 16

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$1,x$	$-,y$	—	$3,y$	$2,-$	$9,y$	$7,y$	$9,y$	$7,-$
b	$2,-$	$5,y$	$5,x$	—	$4,-$	$-,x$	$8,x$	—	$8,y$

№ 17

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$2,-$	$1,x$	$-,x$	$4,-$	$5,x$	$7,-$	—	$7,x$	$-,y$
b	$4,x$	—	$2,y$	$4,x$	$6,-$	$-,x$	$6,x$	$5,y$	$8,-$

№ 18

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$2,-$	$1,y$	$5,x$	$2,-$	$6,-$	$-,x$	$9,-$	$9,x$	$-,y$
b	$1,y$	$3,-$	—	$5,x$	$4,x$	$7,-$	$6,x$	$-,y$	$6,x$

№ 19

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$4,x$	$-,y$	$7,x$	$5,-$	$8,x$	$7,-$	$2,y$	$-,x$	$-,y$
b	$-,y$	$4,-$	$9,x$	$9,y$	$-,y$	—	$8,x$	$9,-$	$5,x$

№ 20

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$2,x$	$-,y$	$8,y$	$7,-$	$4,-$	$-,y$	$4,x$	—	$3,y$
b	$-,y$	$9,x$	—	$5,x$	$6,x$	$7,y$	$-,y$	$6,y$	$8,x$

№ 21

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$2,x$	$1,-$	$3,y$	$5,x$	$4,-$	$-,x$	$3,y$	$6,x$	$-,y$
b	$-,x$	$4,x$	—	$2,-$	$3,x$	$3,-$	$8,y$	$8,-$	$4,y$

№ 22

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$5,-$	$9,x$	—	$7,y$	$-,y$	$2,x$	$8,y$	—	$2,y$
b	$3,x$	$-,x$	$8,x$	$5,y$	$6,-$	$-,x$	$5,-$	$9,y$	$3,-$

Таблица 6.2.2 (продолжение)

№ 23

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$3, x$	$8, -$	—	$1, x$	$8, x$	$7, y$	$6, y$	$-, y$	$9, -$
b	$2, -$	$5, -$	$5, x$	$-, x$	$2, -$	$-, y$	$8, y$	$8, x$	$8, y$

№ 24

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$2, y$	$4, y$	$9, -$	$5, y$	$4, -$	$-, y$	$9, y$	$3, -$	$8, x$
b	$-, y$	$3, -$	$2, y$	—	$7, y$	$9, x$	$4, -$	$-, x$	$9, y$

№ 25

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	—	$3, x$	$-, y$	$6, x$	$5, -$	—	$-, x$	$6, y$	$8, y$
b	$-, x$	—	—	$7, -$	$-, y$	$2, y$	$-, x$	$7, -$	$-, y$

№ 26

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$-, x$	$5, x$	—	$9, -$	$6, y$	$4, x$	$6, -$	—	$4, y$
b	$-, y$	$7, -$	$9, y$	—	$1, -$	$8, -$	$6, y$	$-, x$	—

№ 27

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$2, -$	$6, y$	$7, -$	$-, x$	$2, -$	$5, x$	—	$5, -$	$3, y$
b	—	$-, x$	$4, x$	$1, y$	—	$7, -$	$-, y$	$6, y$	$1, -$

№ 28

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$4, x$	$7, -$	$-, x$	$-, y$	$2, x$	$-, x$	$6, y$	$9, x$	$8, y$
b	$2, -$	$1, x$	$5, x$	$7, y$	$3, -$	$6, x$	$-, y$	$8, x$	$7, y$

Таблица 6.2.2 (окончание)

№ 29

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$2,x$	$1,–$	$5,x$	$7,–$	$3,x$	$5,x$	$–,x$	$9,–$	—
b	$–,x$	$5,y$	$1,y$	—	$–,x$	$1,y$	$4,y$	$7,x$	$8,y$

№ 30

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	—	$7,y$	$1,–$	$5,–$	$–,y$	$5,y$	$1,x$	$7,y$	$–,y$
b	$4,y$	$–,y$	$5,x$	$6,x$	$9,y$	—	$3,x$	$–,y$	$1,x$

Пример решения задания 6.2.2

Решим задание 6.2.2 для автомата, заданного своей таблицей состояний:

Таблица 6.2.2а

A \ Q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a	$2,–$	$3,x$	—	$5,x$	—	—	$1,–$	$5,y$	$–,x$
b	—	$–,y$	$1,y$	—	$6,x$	$–,x$	$4,y$	—	$6,–$

1. Построение слова α начнём “с конца”, т.е. сначала выберем в таблице клетку, в которой происходит переход в неопределённое состояние, например, клетку $(a,3)$. В третье состояние можно перейти из второго при появлении входного сигнала a. Во второе можно перейти из первого при подаче на вход сигнала a и т.д. В результате можно получить слово $\alpha = aaabaaa$, причём автомат над этим словом будем запускать из состояния 7. Проверим работу автомата над словом α:

	a	a	a	b	a	a	a
7	1	2	3	1	2	3	–
	–	–	x	y	–	x	–

Как видим, слово α применимо к состоянию 7, но любое слово, полученное из α приписыванием справа хотя бы одного символа, не будет применимо к состоянию 7, т.к. при подаче последнего символа слова α автомат, запущенный из 7 состояния, перешёл в неопределённое состояние.

2. Строим максимальную группировку. Сначала выявим с помощью треугольной таблицы все пары совместимых состояний. Правило заполнения таблицы остаётся таким же, как и для всюду определённых автоматов. На первом этапе получим (табл. 6.2.2.b):

Таблица 6.2.2b

2	2 3							
3								
4	2 5	3 5						
5		×	×					
6		×	×					
7	1 2	1 3	1 4	1 5	×	×		
8	2 5	×		×			1 5	
9			1 6				4 6	×
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

Потом, заметив, что клетка (2,5) зачёркнута, ставим крест также и на клетку (1,4), куда попала пара (2,5). Таким же образом кресты получат и клетки (1,8), (2,4) и (3,7). Окончательно имеем (табл. 6.2.2c):

Таблица 6.2.2c

2	2 3							
3								
4	~~2 5~~	~~3 5~~						
5		×	×					
6		×	×					
7	1 2	1 3	~~1 4~~	1 5	×	×		
8	~~2 5~~	×		×			1 5	
9			1 6				4 6	×
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

Итак, каждой незачёркнутой клетке таблицы соответствует пара совместимых состояний.

Построение максимальной группировки проведём по алгоритму, содержащему количество шагов, равным числу внутренних состояний автомата:

а) на нулевом шаге выписываем все состояния, объединяя их в один класс;

б) на i - том шаге просматриваем i -ый столбец треугольной таблицы.

Если какой-либо класс внутренних состояний, полученный на предыдущем шаге, не содержит состояния с номером i, то этот класс переписываем без изменений.

Если класс содержит i - е состояние, но все остальные состояния этого класса совместимы с i -тым, то этот класс также переписывается без изменений.

Если класс содержит i - е состояние вместе с состояниями, несовместимыми с i - м, то этот класс делится на две части: одна получается из этого класса удаление состояния с номером i, а другая - удалением из этого класс всех состояний, не совместимых с i - ым.

Если на каком-то шаге образуется два класса, один из которых является собственным подмножеством другого, то меньший удаляется из рассмотрения.

В результате работы этого алгоритма получается максимальная группировка.

Применим алгоритм к нашему примеру. Работа алгоритма будет состоять из 9 шагов. Выпишем классы, получающиеся на каждом шаге:

0) {1,2,3,4,5,6,7,8,9}.

1) {2,3,4,5,6,7,8,9}, {1,2,3,5,6,7,9}.

2) {3,4,5,6,7,8,9}, {2,3,7,9}, {1,3,5,6,7,9}, {1,2,3,7,9}.

3) {4,5,6,7,8,9}, {3,4,8,9}, {1,5,6,7,9}, {1,3,9}, {1,2,7,9}, {1,2,3,9}.

4) {5,6,7,8,9}, {4,5,6,7,9}, {3,8,9}, {3,4,9}, {1,5,6,7,9}, {1,2,7,9}, {1,2,3,9}.

5) {6,7,8,9}, {5,6,8,9}, {4,6,7,9}, {4,5,6,9}, {3,8,9}, {3,4,9}, {1,6,7,9}, {1,5,6,9}, {1,2,7,9}, {1,2,3,9}.

6) {7,8,9}, {6,8,9}, {5,6,8,9}, {4,7,9}, {4,6,9}, {4,5,6,9}, {3,8,9}, {3,4,9}, {1,7,9}, {1,6,9}, {1,5,6,9}, {1,2,7,9}, {1,2,3,9}.

7) {7,8,9}, {5,6,8,9}, {4,7,9}, {4,5,6,9}, {3,8,9}, {3,4,9}, {1,6,9}, {1,5,6,9}, {1,2,7,9}, {1,2,3,9}.

8) {7,9}, {7,8}, {5,6,9}, {5,6,8}, {4,7,9}, {4,5,6,9}, {3,9}, {3,8}, {3,4,9}, {1,6,9}, {1,5,6,9}, {1,2,7,9}, {1,2,3,9}.

Заметим, что на втором, третьем, шестом и восьмом шагах происходило удаление классов, являющихся собственными подмножествами некоторых других классов. В результате получена максимальная группировка:

$\{\{7,8\}, \{5,6,8\}, \{4,7,9\}, \{4,5,6,9\}, \{3,8\}, \{3,4,9\}, \{1,5,6,9\}, \{1,2,7,9\}, \{1,2,3,9\}\}$.

3. Обозначим группы совместимости:

$1' = \{7,8\}$; $2' = \{5,6,8\}$; $3' = \{4,7,9\}$; $4' = \{4,5,6,9\}$; $5' = \{3,8\}$;

$6' = \{3,4,9\}$; $7' = \{1,5,6,9\}$; $8' = \{1,2,7,9\}$; $9' = \{1,2,3,9\}$.

Построим автомат S_1 с входным алфавитом $\{a,b\}$, выходным алфавитом $\{x,y\}$, и множеством внутренних состояний $\{1',2',3',4',5',6',7',8',9'\}$ на основе исходного частичного автомата.

Для построения таблицы состояний покрывающего автомата поступаем следующим образом:

чтобы найти значение функции выхода, например, на наборе $(a,1')$, смотрим значения функции выхода исходного автомата на наборах $(a,7)$ и $(a,8)$. Видим, что $\lambda(a,7)$ не определена, и $\lambda(a,8) = y$. Значит, считаем, что $\lambda(a,1') = y$.

Для нахождения значения $\delta(a,1')$ отметим, что исходный автомат из состояний 7 и 8 при подаче входного символа a переходит в 1 и 5 состояния, которые попали в класс $7'$. Значит, будем считать, что $\delta(a,1') = 7'$.

Продолжая аналогично, построим таблицу состояний покрывающего автомата S_1 :

Таблица 6.2.2d

A \ Q	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
a	$7',y$	$4',y$	$7',x$	$7',x$	$7',y$	$7',x$	$8',x$	$8',x$	$9',x$
b	$4',y$	$2',x$	$4',y$	$7',x$	$7',y$	$7',y$	$7',x$	$4',y$	$7',y$

4. Рассмотрим T - алгоритм построения покрывающего автомата:
а) Выявляем все пары совместимых состояний (например, с помощью треугольной таблицы).

б) Выписываем все состояния автомата в порядке возрастания индексов. Вычёркиваем все состояния, несовместимые с первым, выбираем следующее по порядку возрастания индексов невычеркнутое состояние, зачёркиваем все состояния, несовместимые с ним т.д. В результате получим некоторую группу совместимости.

Составляем из вычеркнутых состояний список по порядку возрастания номеров и проделываем с ним ту же последовательность действий, что была описана в предыдущем абзаце.

Если мы повторим эту процедуру до тех пор, пока это возможно, получим группировку.

в) Начинаем строить покрывающий автомат, в котором каждой группе совместимости соответствует некоторое внутреннее состояние. Если группировка замкнута, такое построение возможно, и полученный автомат будет искомым.

Если группировка не замкнута, строим на её основе замкнутую группировку, расширяя, в случае необходимости, группы совместимости, или добавляя новые группы совместимости.

После получения замкнутой группировки строим покрывающий автомат, сопоставляя каждой полученной группе совместимости внутреннее состояние автомата.

Применим T - алгоритм к нашему автомату. Пары совместимых состояний у нас уже найдены, поэтому сразу переходим к п. б) алгоритма. Напишем полученную последовательность групп состояний:

1 2 3 ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ 9, 4 5 6 ~~7~~ ~~8~~, 7 8.

Итак, найдена группировка: {{1,2,3,9}, {4,5,6}, {7,8}}

Проверим группировку на замкнутость, пробуя построить автомат S_2 с входным алфавитом $\{a,b\}$, выходным алфавитом $\{x,y\}$ и множеством внутренних состояний {1",2",3"}, где 1"={1,2,3,9}; 2"={4,5,6}; 3"={7,8}.

Видим, что при подаче на вход сигнала b исходный автомат переходит из состояний 1,2,3 и 9 либо в неопределённое состояние, либо в 1 или 6. Состояния 1 и 6 вместе не входят ни в какую группу совместимости построенной группировки, и группу 2" нельзя расширить, добавив в неё состояние 1, т.к. оно несовместимо с состоянием 4, вошедшим в 2".

Итак, добавим новое состояние 4"= {1,6}.

Далее видим, что из состояний 7 и 8 под действием сигнала a исходный автомат переходит в состояния 1 и 5, которые также не вошли ни в одну группу совместимости построенной группировки. Заметим, что состояния 1, 5 и 6 совместимы, поэтому группа $4''=\{1,6\}$ может быть расширена добавлением состояния 5, значит, $4''$ примет вид $4''=\{1,5,6\}$.

Заметим, что при подаче сигнала a из состояний 1,5,6 исходный автомат переходит либо в неопределённое состояние, либо во 2 состояние, а при подаче b - либо в неопределённое состояние, либо в состояние 6. Каждое из этих состояний входит в одну из новых групп совместимости. Значит, построенная группировка замкнута. Строим таблицу автомата S_2 (табл. 6.2.2е):

Таблица 6.2.2е

A \ Q	1''	2''	3''	4''
a	$1'',x$	$2'',x$	$4'',y$	$1'',-$
b	$4'',y$	$2'',x$	$2'',y$	$4'',x$

Заметим, что $1' = \{7,8\} \subseteq 9' = \{1,2,3,9\}$; $2'' = \{4,5,6\} \subseteq 4' = \{4,5,6,9\}$;
$3'' = \{7,8\} \subseteq 1' = \{7,8\}$; $4'' = \{1,5,6\} \subseteq \{1,5,6,9\}$.

Итак, мы убедились, что каждый класс совместимости попадает в максимальный класс совместимости группировки, построенной в п.2.

5. Проверим работу полученных автоматов над словом α из п. 1 данного задания.

Т.к. $7 \in 1'$, автомат S_1 надо запускать из состояния $1'$.

	a	a	a	b	a	a	a
$1'$	$7'$	$8'$	$8'$	$4'$	$7'$	$8'$	$8'$
	y	x	x	y	x	x	x

Заметим, что слово $yxxyxxx$, полученное в результате работы автомата S_1, запущенного из состояния $1'$ над словом α, покрывает слово $--xy-x-$, полученное в результате работы исходного автомата, запущенного из состояния 7 над α.

Т.к. $7 \in 3''$, автомат S_2 будем запускать из состояния $3''$.

a	a	a	b	a	a	a

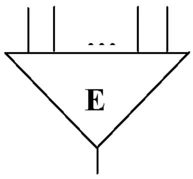
3"	4"	1"	1"	4"	1"	1"	1"
	y	–	x	y	–	x	x

Также видим, что слово $y{-}xy{-}xx$, полученное в результате работы автомата S_2, запущенного из состояния 3" над словом α, покрывает слово $--xy-x-$, полученное в результате работы исходного автомата, запущенного из состояния 7 над α.

6.3. Реализация автоматов схемами

Функциональным элементом называется устройство, имеющее n упорядоченных отрезков вверху, которые называются *входами* и один отрезок внизу, называемый *выходом* функционального элемента.

Функциональный элемент изображается так:



На входы функционального элемента могут подаваться сигналы двух типов, причём при подаче набора сигналов на входы элемента задержки, на выходе мгновенно возникает сигнал одного из этих типов, причём каждый набор входных сигналов однозначно определяет значение выходного сигнала.

Элементом задержки называется конечный автомат, имеющий два внутренних состояния, входной и выходной алфавиты которого имеют по два символа и совпадают, и который осуществляет задержку входного сигнала на один такт времени.

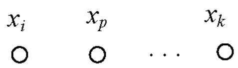
Элемент задержки изображается так:

Верхний отросток называется *входом*, а нижний - *выходом* элемента задержки.

Полюсами называется упорядоченный набор кружков, помеченных символами различных переменных.

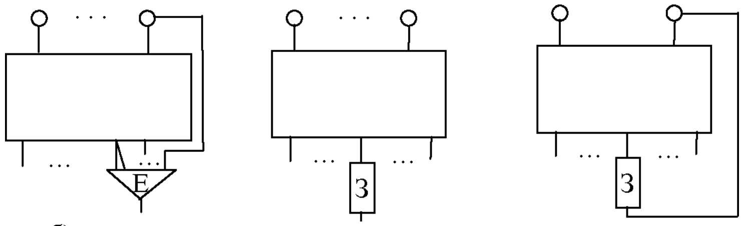
Схема из функциональных элементов и элементов задержки определяется индуктивно:

а) совокупность полюсов (кружков, помеченных символами переменных) есть *схема*; все полюсы являются её *вершинами*;



а)

б) результат присоединения к вершинам схемы всех входов некоторого элемента (функционального элемента или элемента задержки) есть *схема*; *вершинами* новой схемы являются все вершины исходной схемы и выход присоединённого элемента, а *полюсами* – все полюсы исходной схемы;



б) б) в)

в) результат присоединения выхода задержки к некоторому полюсу x_i есть *схема*; её *вершинами* являются все вершины исходной схемы, за исключением x_i, а *полюсами* – все полюсы исходной схемы, кроме x_i. Операция, соответствующая пункту в), называется введением *обратной связи*.

Задание 6.3.1

1. Построить таблицу состояний автомата, осуществляющего автоматное отображение α в β.

2. Провести минимизацию, построить диаграмму состояний минимизированного автомата, проверить работу полученного автомата над словом α.

3. Провести кодировку в двоичные коды символов входного и выходного алфавитов, множества внутренних состояний автомата, написать "физическую" таблицу состояний минимизированного автомата.

4. Построить минимальные ДНФ, реализующие функции переходов и функцию выхода автомата.

5. Построить схему из функциональных элементов типа конъюнкция, дизъюнкция, отрицание и элементов задержки, реализующих данный автомат.

Замечание. Если схема получается сложная, можно реализовать отдельно схемами функции переходов и выхода и изобразить блок - схему автомата.

Таблица 6.3.1

№	α	β	№	α	β
1	*abbacccab*	*иррииррри*	**16**	*bcbaaccbb*	*ририиррри*
2	*bacaabacb*	*ирирриррри*	**17**	*abbccaabc*	*ирррирррри*
3	*caaabcbba*	*иррииририи*	**18**	*baabcbbac*	*риииририи*
4	*acbcacbbc*	*ирррририир*	**19**	*acbccbabc*	*иририрриии*
5	*cacabbbac*	*иррииррии*	**20**	*baaccbabc*	*рииррирррр*
6	*baabccbcc*	*ририиррри*	**21**	*cabcbcbaa*	*иририрррри*
7	*bacaaccba*	*рииириирр*	**22**	*bcbabccba*	*ририиррррр*
8	*caacaabbb*	*рииррииррр*	**23**	*acbbbbcca*	*риририирри*
9	*baccabbcc*	*рриииррир*	**24**	*bacbbcaba*	*ирирррииир*
10	*caabcbacb*	*ирирррииии*	**25**	*abbcabcaa*	*рииррииир*
11	*baaccbaaa*	*рииииррррр*	**26**	*cbcbaabcc*	*ррииририррр*
12	*accbbccab*	*ирирриирри*	**27**	*aaccbcacb*	*иииририирир*
13	*caabbbaca*	*рииириирри*	**28**	*bbbcbabac*	*рриирриир*
14	*bcaccbbba*	*ирирриииир*	**29**	*aabacabba*	*ррррирриии*
15	*ababbcccb*	*иирририррр*	**30**	*aabbbcaac*	*рриирирри*

Пример решения задания 6.3.1

Решим задание 6.3.1 для α = *abccbbbac*, β = *иирирририр*.

1. Строим таблицу состояний инициального частичного автомата, осуществляющего автоматное отображение α в β. Автомат будет иметь входным алфавитом множество $\{a,b,c\}$, выходным алфавитом – мно-

жество $\{u, p\}$ и число состояний, равное количеству символов в словах α и β. Будем обозначать состояния автомата цифрами от 1 до 9.

Функцию переходов зададим следующим образом:

$\delta(a,1) = 2$, $\delta(b,1)$ и $\delta(c,1)$ неопределены. В дальнейшем, если $x_1 x_2,\ldots,x_k$ $(k < 9)$ - начало слова α, то $\delta(x_k, k) = k + 1$, , в остальных случаях $\delta(x_k, k)$ не определена.

Функцию выходов зададим так: если $x_1 x_2,\ldots,x_k$ $(k < 9)$ - начало слова α, то $\delta(x_k, k) = y_k$, где y_k – k - й символ слова β; в остальных случаях $\delta(x_k, k)$ не определена.

Получим таблицу состояний автомата (табл. 6.3.1a):

Таблица 6.3.1a

A \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$2,u$	—	—	—	—	—	—	$9,p$	—
b	—	$3,u$	—	—	$6,p$	$7,p$	$8,u$	—	—
c	—	—	$4,p$	$5,u$	—	—	—	—	$-,p$

2. Сначала строим треугольную таблицу для нахождения пар совместимых состояний (табл. 6.3.1b):

Таблица 6.3.1b

2								
3								
4			×					
5		×						
6		×			× 6 7			
7		3 8			×	×		
8	×							
9				×				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

Проведём минимизацию с помощью T - алгоритма:

$1\ 2\ 3\ \cancel{4}\ \cancel{5}\ \cancel{6}\ 7\ \cancel{8}\ 9,\ \ 4\ 5\ \cancel{6}\ 8,\ \ \ 6.$

Таблица 6.3.1c

A \ Q	1'	2'	3'
a	$1', p$	$1', p$	$1', p$
b	$3', u$	$3', p$	$1', p$
c	$2', p$	$2', u$	$2', p$

Обозначим: $1' = \{1,2,3,7,9\}$; $2' = \{4,5,8\}$; $3' = \{3,6,8\}$.

Строим таблицу покрывающего автомата (табл. 6.3.1c):

Проверим работу полученного автомата на словом α:

	a	b	c	c	b	b	b	a	c
$1'$	$1'$	$3'$	$2'$	$2'$	$3'$	$1'$	$3'$	$1'$	$2'$
	u	u	p	u	p	p	u	p	p

3. Проведём кодировку двоичными кодами символов входного и выходного алфавитов, символов множества внутренних состояний автомата:

a - 00, b – 01, c – 11, u – 0, p – 1,

$1'$ – 00, $2'$ – 01, $3'$ – 11.

Запишем “физическую таблицу состояний автомата, т.е. таблицу состояний, в которой символы состояний, символы входного и выходного алфавитов заменены их двоичными кодами:

Таблица 6.3.1d

x_1x_2 \ $q_1'q_2'$	00	01	11
00	00,0	00,1	00,1
01	11,0	11,1	00,1
11	01,1	01,0	01,1

4. Будем рассматривать эту таблицу, как сводную таблицу двух функций переходов q_1, q_2, соответствующих старшим и младшим разрядам

двоичных кодов состояний и функции выхода y, которые зависят от четырёх переменных x_1, x_2, q_1', q_2'.

Для каждой из этих функций найдём минимальную ДНФ с помощью карт Карнау.

Запишем в карту Карнау таблицу значений функции q_1, выписав значения старших разрядов двоичных кодов состояний автомата, взятые из “физической” таблицы переходов, заменяя значения, на которых q_1 не определена, прочерками (табл. 6.3.1e):

Таблица 6.3.1e

x_1x_2 \ $q_1'q_2'$	00	01	11	10
00	0	0	0	–
01	1	1	0	–
11	0	0	0	–
10	–	–	–	–

Имеем: $q_1 = \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot \overline{q'}_1$.

Аналогично, построим карту Карнау для функции q_2 (табл. 6.3.1f):

Таблица 6.3.1f

x_1x_2 \ $q_1'q_2'$	00	01	11	10
00	0	0	0	–
01	1	1	0	–
11	1	1	1	–
10	–	–	–	–

Получаем: $q_2 = x_1 \vee x_2 \cdot \overline{q'}_1$.

Строим карту Карнау для функции выхода (табл. 6.3.1g):

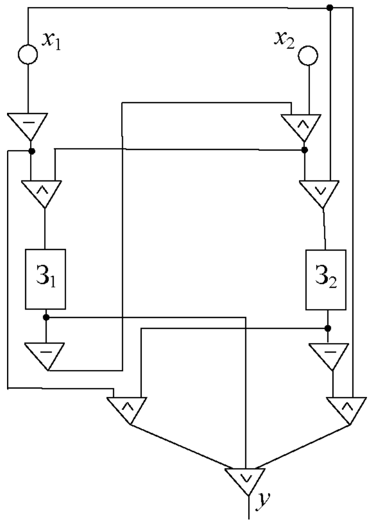
Таблица 6.3.1g

$q'_1 q'_2$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00	0	1	1	–
01	0	1	1	–
11	1	0	1	–
10	–	–	–	–

Имеем: $y = q'_1 \vee x_1 \cdot \overline{q'}_2 \vee \overline{x}_1 \cdot q'_2$.

Итак, $q_1 = \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot \overline{q'}_1$, $q_2 = x_1 \vee x_2 \cdot \overline{q'}_1$, $y = q'_1 \vee x_1 \cdot \overline{q'}_2 \vee \overline{x}_1 \cdot q'_2$.

5. Строим схему из функциональных элементов типа конъюнкция, дизъюнкция, отрицание и элементов задержки.



Задание 6.3.2

1. Удалить из данной схемы задержки и написать формулы для функций q_1, q_2, q_3, y.

2. Построить таблицы для функций, найденных в п.1

3. Свести таблицы, найденные в п.2 в одну, провести кодировку.

4. Провести минимизацию автомата.

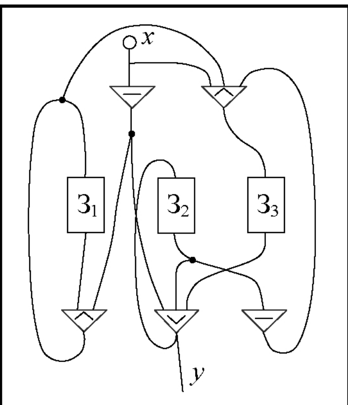
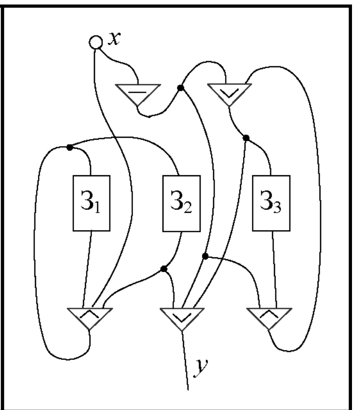
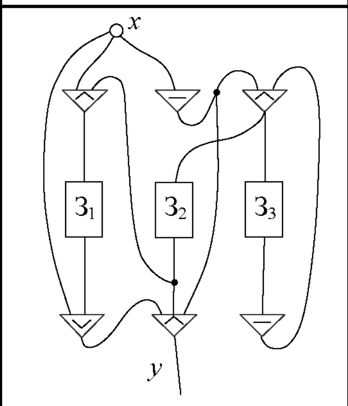
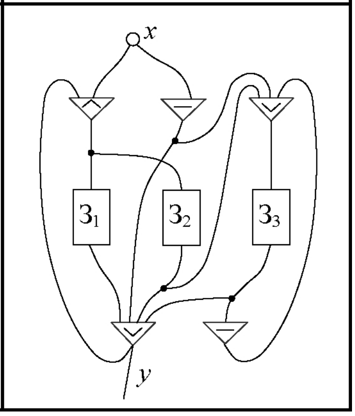
5. Для минимального автомата провести обратную кодировку, написать “ физическую “ таблицу переходов и выхода.

6. С помощью карт Карнау написать формулы функций перехода и выхода.

7. Реализовать найденные функции схемами из функциональных элементов типа конъюнкция, дизъюнкция и отрицание .

8. Изобразить схему из функциональных элементов типа конъюнкция, дизъюнкция, отрицание и задержек, реализующую минимальный конечный автомат.

Таблица 6.3.2

1		**2**	
3		**4**	

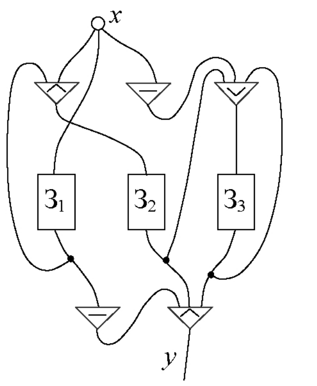
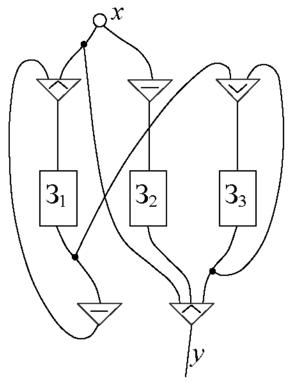
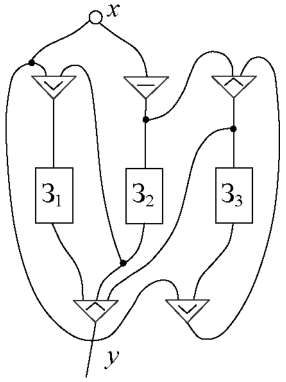
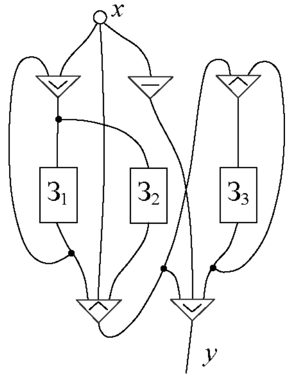
5		**6**	

Таблица 6.3.2(продолжение)

7		**8**	

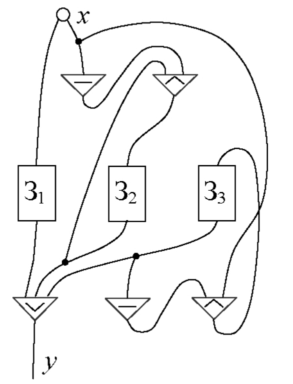
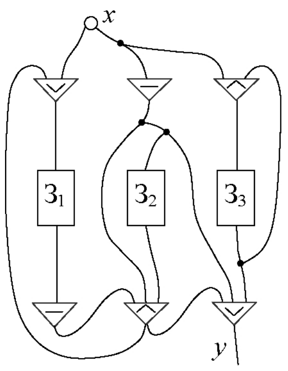
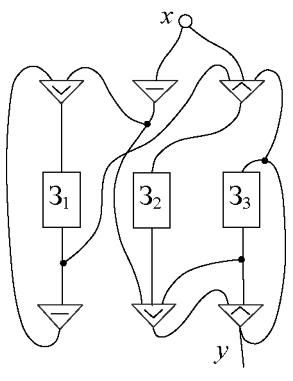
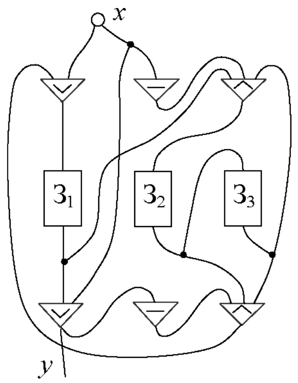
9		**10**	
11		**12**	

Таблица 6.3.2(продолжение)

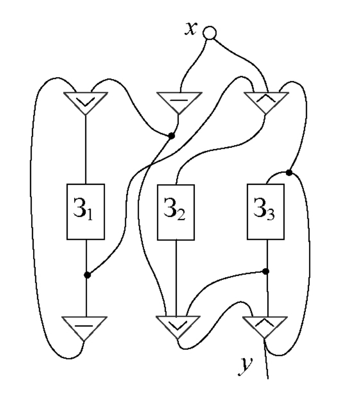
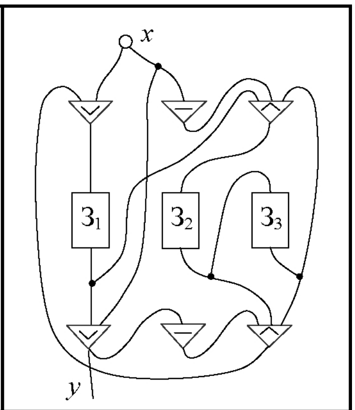
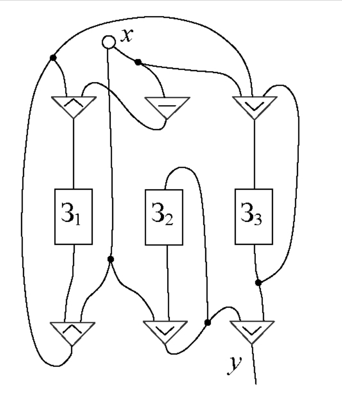
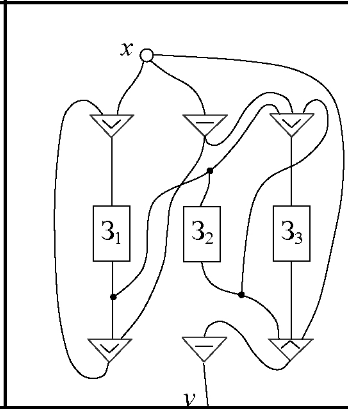
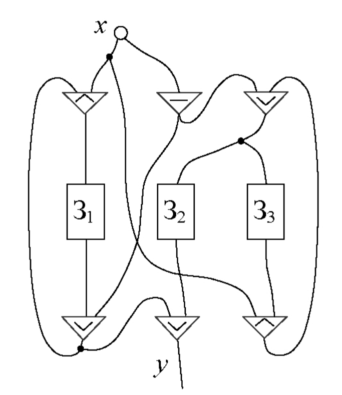
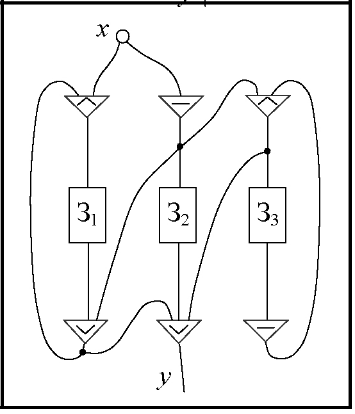
11		**12**	
13		**14**	
15		**16**	

Таблица 6.3.2(продолжение)

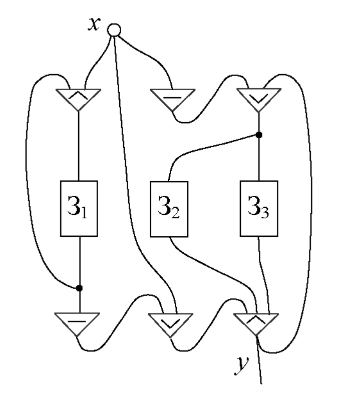
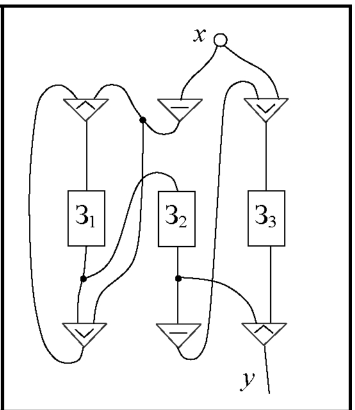
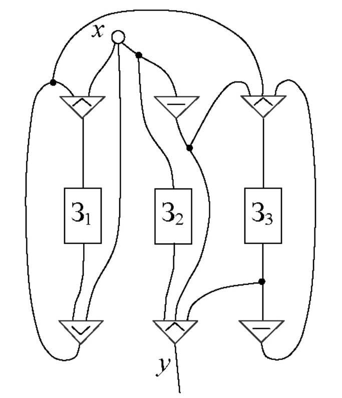
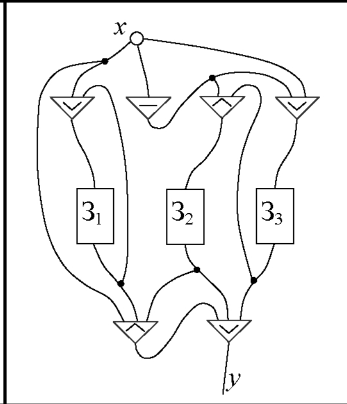
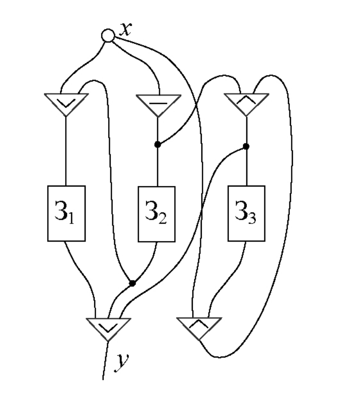
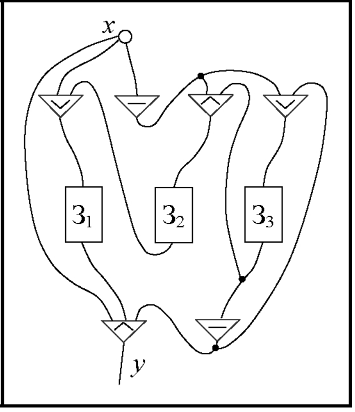
<table>
<tr><td>17</td><td>
</td><td>18</td><td>
</td></tr>
<tr><td>19</td><td>
</td><td>20</td><td>
</td></tr>
<tr><td>21</td><td>
</td><td>22</td><td>
</td></tr>
</table>

Таблица 6.3.2(продолжение)

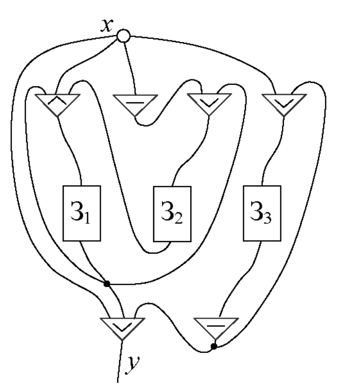
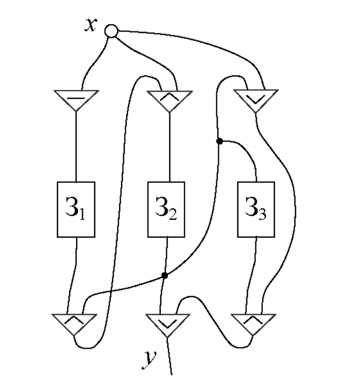
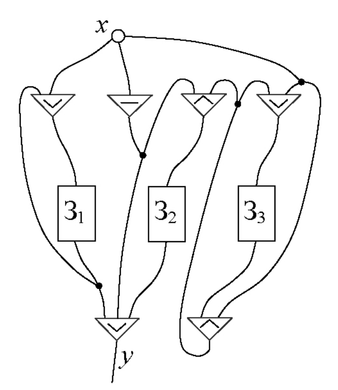
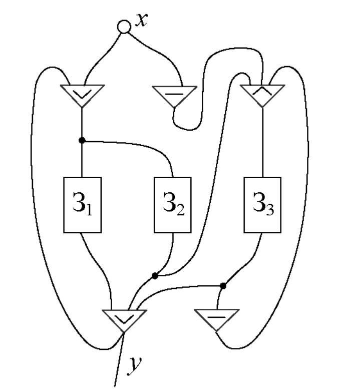
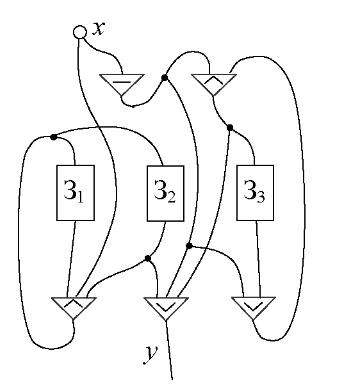
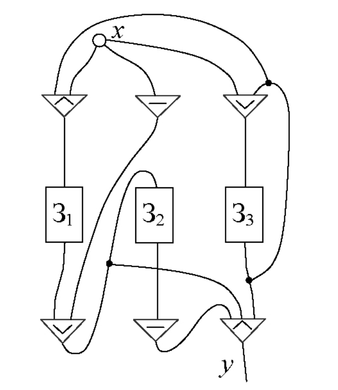
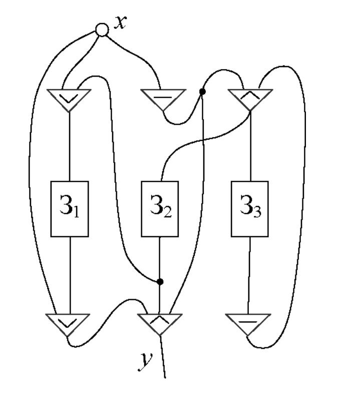
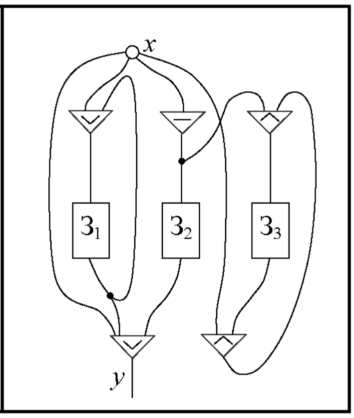
23		**24**	
25		**26**	
27		**28**	

Таблица 6.3.2(окончание)

29		**30**	

Пример решения задания 6.3.2

Решим задание 6.3.2 для данной схемы (рис. 6.3.2):

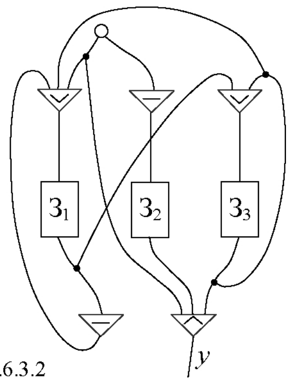


Рис.6.3.2

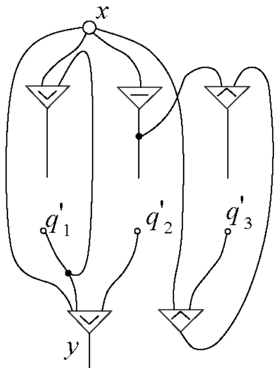


Рис.6.3.2а

1. Удалим задержки (рис.6.3.2а), введём три новых полюса q_1', q_2' и q_3', соответствующих выходам задержек, а входам задержек будут соответствовать вершины q_1, q_2 и q_3.

Проведём анализ схемы, напишем формулы для функций q_1, q_2, q_3 и y.

$$q_1 = x \vee q_1'; \quad q_2 = \overline{x}; \quad q_3 = x \wedge q_3' \wedge \overline{x} \equiv 0; \quad y = x \vee q_1' \vee q_2'.$$

2. Напишем таблицы найденных функций

Таблица для $q_1 = x \vee q_1'$ (табл. 6.3.2a):

Таблица 6.3.2a

$x \backslash q_1'q_2'q_3'$	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Таблица для $q_2 = \overline{x}$ (табл. 6.3.2b):

Таблица 6.3.2b

$x \backslash q_1'q_2'q_3'$	000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица для $y = x \vee q_1' \vee q_2'$ (табл. 6.3.2c):

Таблица 6.3.2c

$x \backslash q_1'q_2'q_3'$	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

3. Сведём построенные таблицы в одну (табл. 6.3.2d):

Таблица 6.3.2d

$x \backslash q_1'q_2'q_3'$	000	001	010	011	100	101	110	111
0	010,0	010,1	010,1	010,1	110,1	110,1	110,1	110,1
1	100,1	100,1	100,1	100,1	100,1	100,1	100,1	100,1

Закодируем наборы значений $q_1'q_2'q_3'$:

000 – 1; 001 – 2; 010 – 3; 011 – 4; 100 – 5; 101 – 6; 110 – 7; 111 – 8.

Перепишем сводную таблицу, заменяя трёхразрядные двоичные наборы их кодами (табл.6.3.2e):

Таблица 6.3.2e

x \ Q	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2,0	2,1	2,1	2,1	7,1	7,1	7,1	7,1
1	5,1	5,1	5,1	5,1	5,1	5,1	5,1	5,1

4. Минимизируем полученный автомат по числу внутренних состояний. Строим треугольную таблицу (табл. 6.3.2f):

Таблица 6.3.2f

2	×						
3	×						
4	×						
5	×	2 7	2 7	2 7			
6	×	2 7	2 7	2 7			
7	×		2 7	2 7			
8	×	2 7	2 7	2 7			
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

Из построенной таблицы видно, что все состояния, кроме первого, эквивалентны между собой. Запишем классы эквивалентности: 1' = {1}; 2'={2,3,4,5,6,7,8}. Изобразим таблицу состояний минимального автомата (табл.6.3.2g):

Таблица 6.3.2g

$x \backslash q'$	1'	2'
0	2',0	2',1
1	2',1	2',1

5. Проведём обратную кодировку:

1' - 0; 2' - 1, запишем “физическую” таблицу состояний автомата (табл.6.3.2h):

Таблица 6.3.2h

$x \backslash q'$	0	1
0	1,0	1,1
1	1,1	1,1

6. Ввиду простоты примера, нет необходимости использовать карты Карнау, функция перехода - тождественная единица, которая может быть реализована формулой $q = x \vee \overline{x}$, функция выхода описывается формулой $y = \overline{x} \vee \overline{q'}$.

7-8. Изобразим схему из функциональных элементов и задержек, реализующую минимальный автомат (рис.6.3.2):

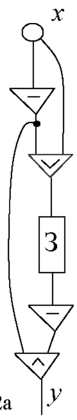


Рис.6.3.2а

6.4. Распознавание множеств автоматами

Автоматом Мура называется пятерка $S = (A,Q,V,\delta,\mu)$, где $A = \{a_1,\dots,a_n\}$ - *входной алфавит*; $Q = \{q_1, . . q_m\}$ - *множество* *внутренних состояний*; $V = \{v_1, \ .v_k\}$ - *выходной алфавит*; $\delta: A \times Q \to Q$ - *функция переходов*; $\mu: Q \to V$ - *функция отметок.*

Автоматом без выхода называется пятерка $S = (A, Q, \delta, q_1, F)$, где $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ - *входной алфавит*; $Q = \{q_1, \ldots, q_m\}$ - *множество внутренних состояний*; $\delta: A \times Q \to Q$ - *функция переходов*; $q_1 \in Q$ - *начальное состояние*; $F \subseteq Q$ - *множество заключительных состояний*.

Событием называется множество E такое, что $E \subseteq A^*$, где A^* - *множество слов* в алфавите A.

Элементарным событием называется слово, состоящее из одной буквы.

Событие E *представимо автоматом без выхода* S, если автомат при работе над словом α переходит в одно из своих заключительных состояний тогда и только тогда, когда α принадлежит E.

Конкатенацией слов α и β называется слово, полученное из данных слов выписыванием всех символов слова α, а затем - всех символов слова β.

Конкатенацией событий E_1 и E_2 называется событие $E_1 \circ E_2$, которое определятся так: $E_1 \circ E_2 = \{\alpha_1\alpha_2 \mid \alpha_1 \in E_1$ и $\alpha_2 \in E_2\}$.

Итерацией события E называется событие E^*, определяющееся так: $E^* = \{e \cup E \cup EE \cup E^3 \cup \ldots \cup E^k \cup \ldots\}$, где e - *пустое слово*, $E^k = \underbrace{E \circ E \circ \ldots \circ E}_{k}$ - *регулярная степень*.

Регулярным называется событие, которое может быть получено из элементарных событий с помощью применения конечного числа раз операций конкатенации, объединения и итерации.

Источником будем называть ориентированный граф, в котором:

1) выделено некоторое множество начальных вершин и некоторое множество конечных вершин, имеющих, возможно, непустое пересечение;

2) над каждым ребром графа стоит или буква из входного алфавита, или пустое слово.

Источник H *представляет событие* E, если E состоит из тех и только тех слов, которые соответствуют всем маршрутам из начальных вершин источника в заключительные вершины.

Исток - вершина, из которой дуги только выходят; *сток* - вершина, в которую дуги только заходят.

Детерминированный источник - источник, имеющий ровно одну начальную вершину, не имеющий пустых рёбер, причём для любой вершины h источника и любого символа a входного алфавита существует единственная дуга, выходящая из вершины h и помеченная символом a.

Недетерминированным автоматом называется пятерка $S=(A,Q,\delta_H,q_1,F)$, где $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ - *входной алфавит*;

$Q=\{q_1,\ldots,q_m\}$ - *множество внутренних состояний*;

$\delta_H : A\times Q\to P(Q)$ - *функция переходов*, где $P(Q)$ - множество всех подмножеств множества Q; $q_1\in Q$ - *начальное состояние*; $F\subseteq Q$ - *множество заключительных состояний*.

Задание 6.4.1

1. Написать таблицу состояний данного автомата.

2. Считая автомат неинициальным, построить эквивалентный автомат Мура. Проверить работу данного и построенного автоматов над одним и тем же словом.

Таблица 6.4.1

№	автомат

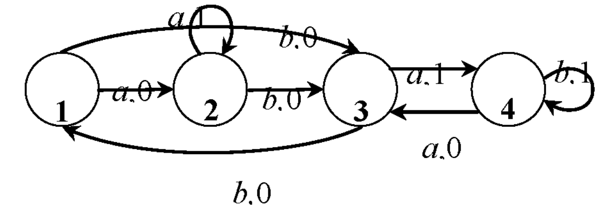
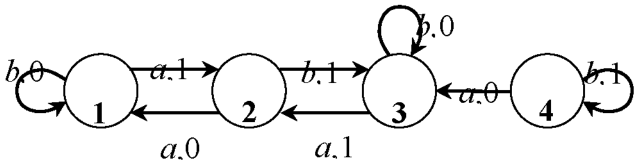
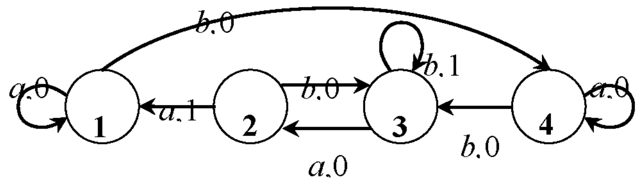
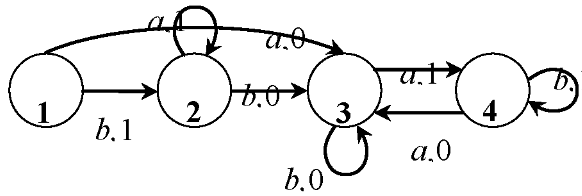
<table>
<tr><td>1</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4</td><td>
</td></tr>
</table>

Таблица 6.4.1(продолжение)

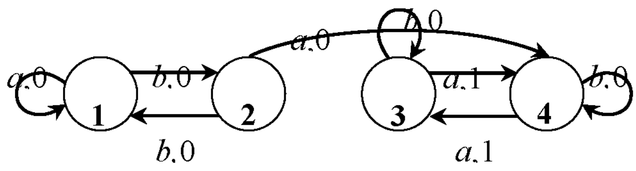
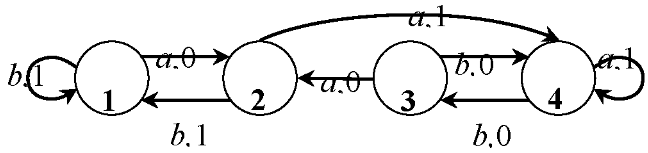
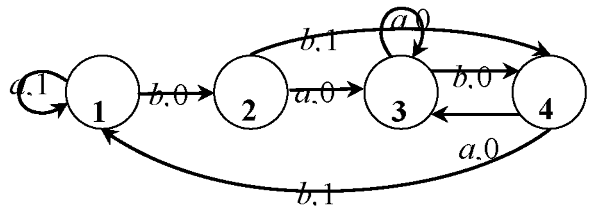
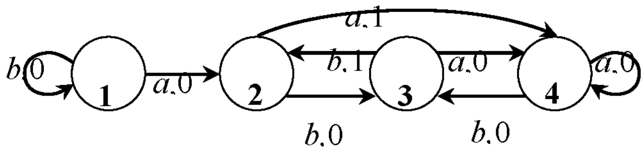
№	автомат
5	
6	
7	
8	

Таблица 6.4.1(продолжение)

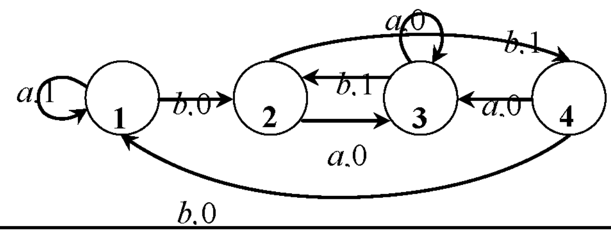
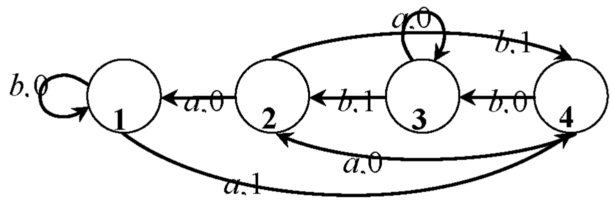
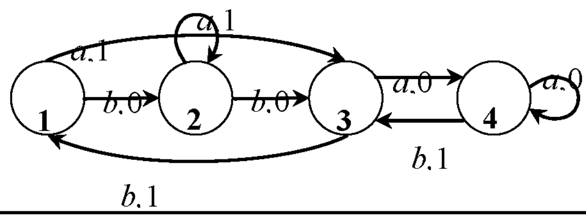
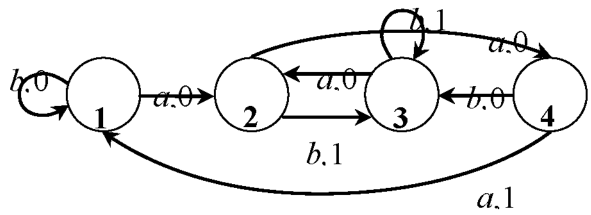
№	автомат
9	
10	
11	
12	

Таблица 6.4.1(продолжение)

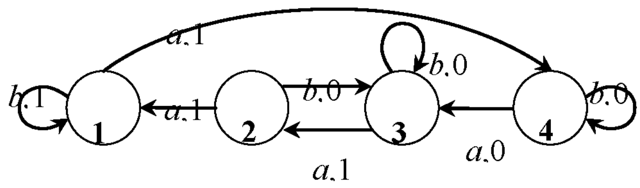
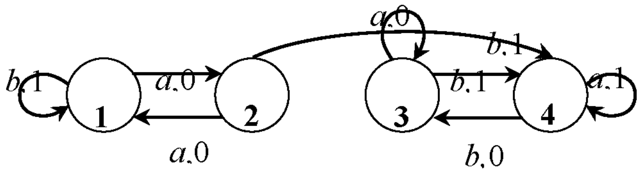
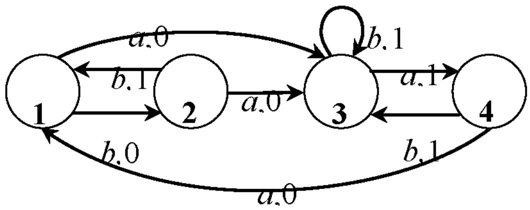
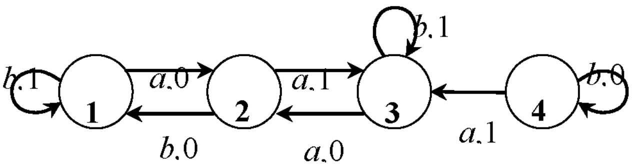
№	автомат
13	
14	
15	
16	

Таблица 6.4.1(продолжение)

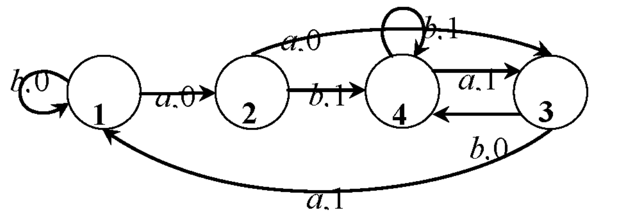
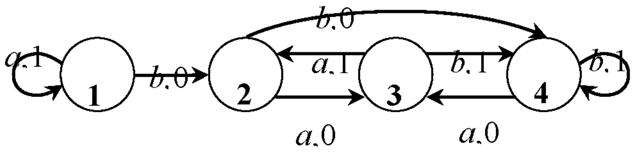
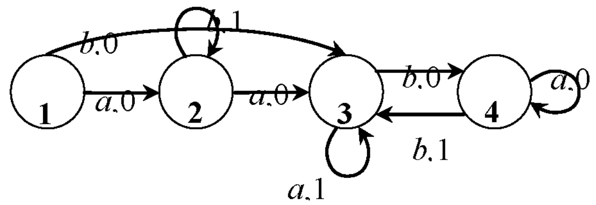
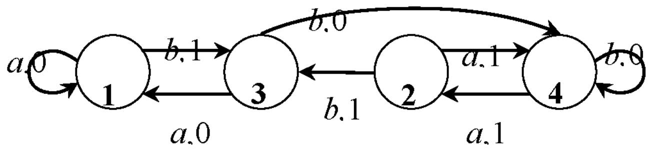
№	автомат
17	
18	
19	
20	

Таблица 6.4.1(продолжение)

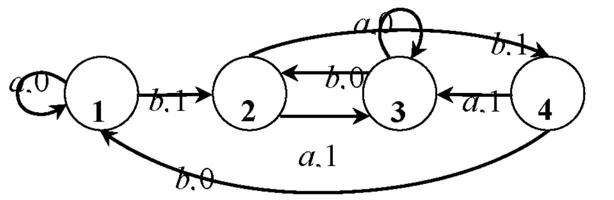
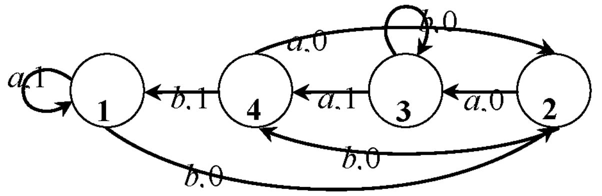
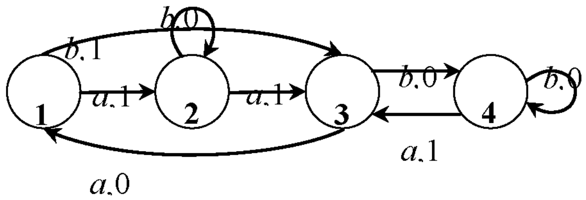
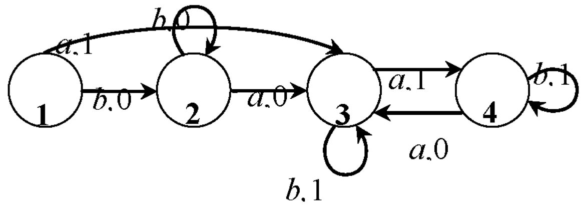
№	автомат
21	
22	
23	
24	

Таблица 6.4.1(продолжение)

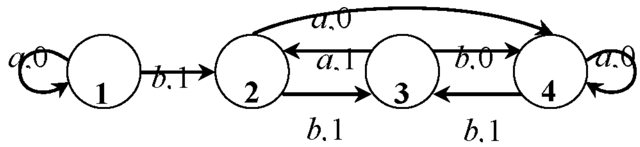
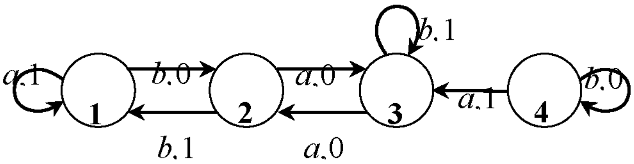
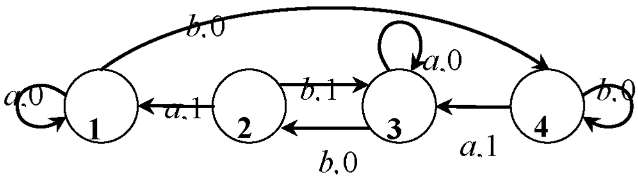
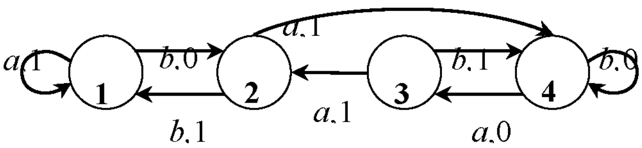
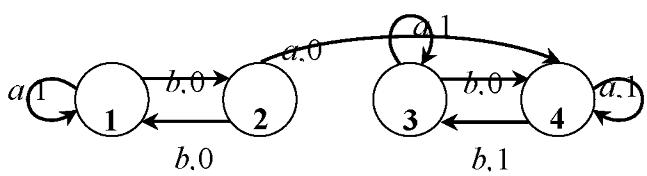
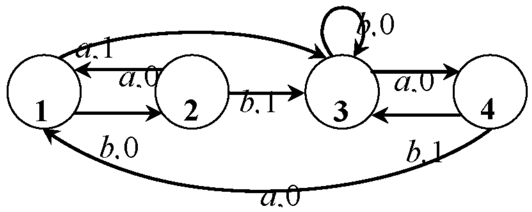
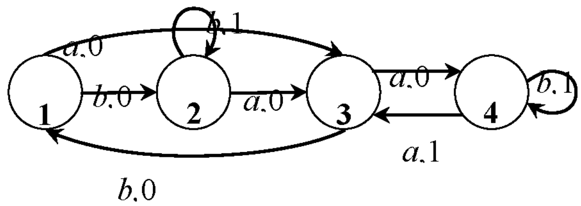
№	автомат
25	
26	
27	
28	

Таблица 6.4.1(окончание)

№	автомат
29	
30	

Пример решения задания 6.4.1

Решим задание 6.4.1 для автомата, заданного своей диаграммой состояний:



Изобразим таблицу данного автомата (табл.6.4.1а):

Таблица 6.4.1а

A \ Q	1	2	3	4
a	3,0	3,0	4,0	3,1
b	2,0	2,1	1,0	4,1

По данному неинициальному автомату Мили S строим эквивалентный ему автомат Мура S' следующим образом:

автомат S' содержит $4 \cdot 2 + 4 = 12$ состояний, каждое из которых мы будем помечать двумя символами. Состояния автомата S' обозначим так: $*1, *2, *3, *4, a1, b1, a2, b2, a3, b3, a4, b4$.

Функция отметок μ на состояниях $*1, *2, *3, *4$ не определена, а её значения на состояниях $a1, b1, \ldots, b4$ задаются с помощью функции выходов λ автомата S: $\mu(ui) = \lambda(u,i)$, где $1 \le i \le 4$, $u \in \{a,b\}$.

То есть, $\mu(a1) = \lambda(a,1) = 0, \ldots, \mu(b4) = \lambda(b,4) = 1$.

Функция переходов δ' на состояниях, содержащих в изображении символ $*$, определяется так: $\delta'(u,*i) = ui$, $u \in \{a,b\}$, $1 \le i \le 4$.

В остальных случаях первый символ имени нового состояния совпадает со считываемым символом входного алфавита, а второй символ имени нового состояния определяется с помощью функции переходов δ автомата S: $\delta'(u,vi) = uj$, где $u,v \in \{a,b\}$, $j = \delta(v,i)$.

Получим: $\delta'(a,*1) = a1$, $\delta'(b,a1) = b2$, т.к. $\delta(a,1) = 2$, и т.д.

Запишем таблицу состояний полученного автомата Мура:

Таблица 6.4.1b

μ	–	–	–	–	0	0	0	1	0	0	1	1
$A \backslash Q$	$*1$	$*2$	$*3$	$*4$	$a1$	$b1$	$a2$	$b2$	$a3$	$b3$	$a4$	$b4$
a	$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a3$	$a2$	$a3$	$a2$	$a4$	$a1$	$a3$	$a4$
b	$b1$	$b2$	$b3$	$b4$	$b3$	$b2$	$b3$	$b2$	$b4$	$b1$	$b3$	$b4$

Проверим работу исходного автомата на словом $baaba$, запустив его из 2 состояния:

	b	a	a	b	a
2	2	3	4	4	3
	1	0	0	1	1

Построенный автомат Мура запускаем из состояния $*2$:

	b	a	a	b	a
*2	$b2$	$a2$	$a3$	$b4$	$a4$
	1	0	0	1	1

Как видим, результаты работы обоих автоматов совпали.

Задание 6.4.2

1. Построить диаграмму автомата без выхода, представляющего конечное событие E, используя, по возможности, меньшее число внутренних состояний.

2. Изобразить найденный автомат таблицей переходов, отметив в ней заключительные состояния.

3. Минимизировать построенный автомат или убедиться, что построенный автомат - минимальный.

4. Проверить работу полученного автомата над словом из множества E и над словом, не попавшим в E.

Таблица 6.4.2

№	E	№	E
1	*bbb, abb, baba, baaa*	**13**	*aaba, bab, aaa, bbaba*
2	*abab, aa, abb, bbab*	**14**	*aba, bba, aaba, bab*
3	*aaab, abab, baa, aab*	**15**	*aaa, bba, babba, abab*
4	*bba, abba, aaba, bb*	**16**	*bbba, abba, aab, baa*
5	*aab, baab, bbba, aaab*	**17**	*aaba, bab, bbaba, aba*
6	*baaa, aaa, bbab, baab*	**18**	*bab, aabb, aab, baaa*
7	*abab, bba, aaba, aba*	**19**	*aaa, baab, bab, aabaa*
8	*bbaa, aaa, baba, aabaa*	**20**	*baaba, bab, aaba, aa*
9	*aab, bbba, bba, aabab*	**21**	*bab, aaba, bbba, aaa*
10	*aba, bbab, abb, baba*	**22**	*baba, aab, bbab, bbb*
11	*bbba, abb, baba, bba*	**23**	*aab, abba, aaab, bbba*
12	*aaab, bbab, aaa, bab*	**24**	*abb, baab, bbab, baaa*

Таблица 6.4.2а

№	E
25	$aaa, abba, bba, babbb$
26	$bba, babb, aab, abaa$
27	$aba, baab, bbaba, bba$

№	E
28	$aaa, baa, ababa, baab$
29	$aab, bab, abbb, baab$
30	$baa, abaa, bbab, abbba$

Пример решения задания 6.4.2

Решим задание 6.4.2 для события $E = \{aba, bbab, baa, abbb\}$.

1. Изобразим диаграмму состояний автомата без выхода (рис. 6.4.2) с начальным состоянием 1, изобразив заключительное состояние двойным кружком так, чтобы каждому слову из множества E соответствовал маршрут из начального состояния в заключительное, и такие маршруты находились бы лишь для слов из множества E.

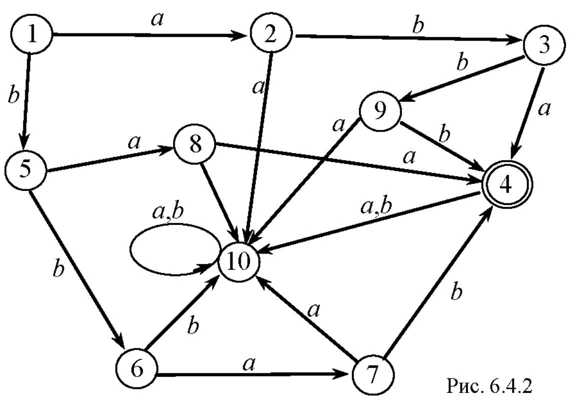


Рис. 6.4.2

2. Запишем таблицу состояний, соответствующую полученной диаграмме:

Таблица 6.4.2а

$A \backslash Q$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	2	8	4	10	8	7	10	4	10	10
b	5	3	9	10	6	10	4	10	4	10

3. Проверим автомат на минимальность, считая, что заключительным состояниям соответствуют выходные символы одного типа, а всем остальным состояниям - выходные символы другого типа.

Составим таблицу, расставив кресты в клетках, соответствующих парам состояний разного вида:

Таблица 6.4.2b

2	2 10 5 3								
3	2 4 5 9	4 10 5 9							
4	X	X	X						
5	2 8 5 6	3 6 8 10	4 8 6 9	X					
6	2 7 5 10	7 10 3 10	4 7 9 10	X	7 8 6 10				
7	2 10 4 5	3 4	9 10 4 9	X	8 10 4 6	7 10 4 10			
8	2 4 5 10	4 10 3 10	9 10	X	4 8 6 10	4 7	4 10		
9	2 10 4 5	3 4	4 10 4 9	X	8 10 4 6	7 10 4 10		4 10	
10	8 10 5 10	3 10	4 10 9 10	X	8 10 6 10	7 10	4 10	4 10	4 10
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

Продолжим процедуру минимизации. Окончательно получим таблицу (табл. 6.4.2c):

Таблица 6.4.2c

2	2 10 5 3								
3	2 4 5 9	4 10 5 9							
4									
5	2 8 5 6	4 6 8 10	4 8 6 9						
6	2 7 5 10	7 10 3 10	4 7 9 10		7 8 6 10				
7	2 10 4 5	3 4	9 10 4 9		8 10 4 6	7 10 4 10			
8	2 4 5 10	4 10 3 10	9 10		4 8 6 10	4 7	4 10		
9	2 10 4 5	3 4	4 10 4 9		8 10 4 6	7 10 4 10		4 10	
10	8 10 5 10	3 10	4 10 9 10		8 10 6 10	7 10	4 10	4 10	4 10
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

Видим, что состояния 7 и 9 эквивалентны. Переходим к минимальному автомату, состояния которого соответствуют классам эквивалентности данного автомата.

Получим: 1'={1}, 2' = {2}, 3' = {3}, 4' = {4}, 5' = {5}, 6' = {6}, 7' = {7,9}, 8' = {8}, 9' = {10}.

Изобразим таблицу состояний минимального автомата (табл. 6.4.2d):

Таблица 6.4.2d

*A**Q*	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
a	2'	8'	4'	9'	8'	7'	9'	4'	9'
b	5'	3'	7'	9'	6'	9'	4'	9'	9'

4. Проверим работу автомата над словом, вошедшим в E, например, $bbab$:

	b	b	a	b
1'	5'	6'	7'	4'

В результате на последнем шаге произошёл переход в заключительное состояние 4'.

Проверим работу автомата над словом, не вошедшим в E, например, $baab$:

	b	a	b	b
1'	5'	8'	9'	9'

В результате работы автомата над словом $baab$ автомат оказался в состоянии 9', которое не является заключительным, чего и следовало ожидать.

Задание 6.4.3

Изобразить недетерминированный источник, соответствующий недетерминированному автомату, заданному таблицей переходов, с входным алфавитом $\{a,b\}$ и множеством внутренних состояний $\{1,2,3,4,5\}$. При построении использовать возможно меньшее число дуг. В построенном недетерминированном источнике желательно присутствие хотя бы одного пустого ребра. Если построить соответствующий недетерминированный источник с пустым ребром невозможно, докажите это.

Таблица 6.4.3

№ 1

$A\backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	$\varnothing$	1	2,3,4	1	3,4
b	3,4	3,5	$\varnothing$	3,5	2,4

№ 2

$A\backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	1,5	1,3,4,5	$\varnothing$	1	3
b	$\varnothing$	2,4	2,3,4	$\varnothing$	4,5

№ 3

$A \backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	∅	∅	4	∅	1,2,4
b	3,4,5	1,3	2,3,5	1,2	2,3,5

№ 4

$A \backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	1,3,4,5	2,3,4	∅	∅	1,3,5
b	4	3	1,5	2,4	4

№ 5

$A \backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	∅	2,3	∅	3,4	4,5
b	1,2,3	1,4,5	1,5	∅	2,3

№ 6

$A \backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	1,2,3	∅	3,4	1,2	∅
b	3	2,3,4	∅	2,5	3,4

№ 7

$A \backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	∅	∅	3	∅	2,3,4
b	1,4,5	1,2,4	4,5	1,3	1,3

№ 8

$A \backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	1,2	∅	3,5	3,4	1,2,3,5
b	2,4	1,3,5	∅	∅	1,2

№ 9

$A \backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	2,3,4,5	3,4	∅	∅	2,4,5
b	3	2,5	3	1,5	3

Таблица 6.4.3(продолжение)

№ 10

$A \backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	∅	2	1,3,4,5	5	∅
b	1,3,4	3,4	2,5	∅	2,4

№ 11

$A \backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	1,2	1,2,3	1,2,3	∅	1,4
b	1,5	1,5	3	4,5	1,2,3

№ 12

$A \backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	∅	3,4	∅	∅	2
b	1,3,4	2,4,5	2,4	1,4,5	1,3,4,5

№ 13

$A \backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	1,4	1,3,4,5	3,4	1,3	∅
b	∅	∅	1,2,4,5	1,2,4,5	1,3

№ 14

$A \backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	1,2,5	3	1,2,5	1,3	3
b	3	∅	3,4	1,2,5	∅

№ 15

$A \backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	1,3,4	2,3	1,3	∅	1,3,4,5
b	1,2,3	∅	4	1,2,5	1,2,3

№ 16

$A \backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	∅	∅	∅	2,3	3,4,5
b	1,3,4	1,2	3,4,5	1,2	2,3,4,5

Таблица 6.4.3(продолжение)

№ 17

$A\backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	1,3	1,3	1,4,5	1,2	3,4
b	1,3,5	1,3,5	$\varnothing$	$\varnothing$	1

№ 18

$A\backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	2,4	3,4	$\varnothing$	$\varnothing$	1,2,4,5
b	$\varnothing$	1,2,3,4	1,4,5	3,4	3

№ 19

$A\backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	3,5	3,5	1,2,4	1,2,4	3,4
b	1,2,5	$\varnothing$	3,5	$\varnothing$	1,2

№ 20

$A\backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	1,3	$\varnothing$	1,2,3,4	3	1,3
b	1,2,3	1,3,4	1,2,3	$\varnothing$	5

№ 21

$A\backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	2,5	1	1,5	$\varnothing$	1,2,5
b	1,4,5	2,3	$\varnothing$	1,3,4	1,2,4,5

№ 22

$A\backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	1,3	2,3,4	1,2,4	1,2,3	1,2,3,4
b	$\varnothing$	$\varnothing$	3,5	$\varnothing$	1,3,5

№ 23

$A\backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	5	1,3,4	5	1,3	2,4

b	3,4,5	2,3,4	3,4,5	∅	∅

Таблица 6.4.3(окончание)

№ 24

$A \backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	1,2,4	∅	3,4	∅	1,5
b	3,4	1,3,4	3,4,5	3,4,5	3,4

№ 25

$A \backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	∅	1,3	1,3,5	3,4	1,3,5
b	1,2,4	∅	∅	1,3,4	1,3

№ 26

$A \backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	1,4	3,4	∅	4,5	∅
b	1,4,5	2,3	1,2	∅	∅

№ 27

$A \backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	4	3,5	∅	1,3	5
b	∅	1,2,3	1,2,3	1,3,4	2,3

№ 28

$A \backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	2	∅	1,3,5	∅	1,3,5
b	4,5	3,5	5	2,4	∅

№ 29

$A \backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	1,3	4	1,2,3	3	∅
b	1,2	1,3	∅	4,5	5

№ 30

$A \backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

a	∅	2	1,5	1,5	2,5
b	1,2	3,4	2,3	2,3,4,5	∅

Пример решения задания 6.4.3

Решим задание 6.4.3 для недетерминированного автомата, заданного таблицей переходов:

Таблица 6.4.3а

*A**Q*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a	2,4,5	3	5	4,5	4,5
b	3,5	∅	3,4,5	∅	∅

Выясним, можно ли построить недетерминированный источник, соответствующий данному недетерминированному автомату, содержащий пустое ребро.

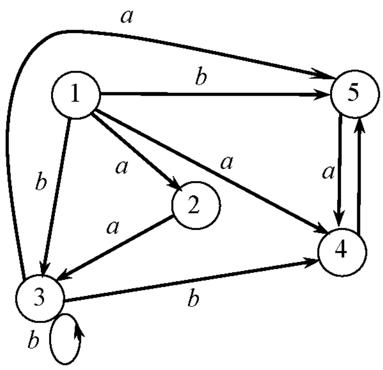
Если недетерминированный источник содержит пустую дугу, выходящую из i - той вершины и заходящую в k - ю вершину, то, очевидно, должны выполняться два условия:

1) i - тая вершина не встречается в какой-либо клетке таблицы автомата без k - той вершины;

2) множество вершин, в которое можно попасть, считав любой символ входного алфавита, из вершины k, включено во множество вершин, в которое можно попасть из вершины i, считав тот же символ.

Первое из этих условий выполняется для пар вершин (2;4), (2;5) и (4;5), но второе условие выполняется только для пары (4;5). Будем строить недетерминированный источник с пустой дугой, выходящей из 4 вершины и заходящей в 5 вершину.

Получим:



Задание 6.4.4

1. Изобразить источник с одним истоком, представляющий событие α.

2. Записать таблицу соответствующего недетерминированного автомата.

3. Построить таблицу детерминированного автомата, эквивалентного автомату, полученному в п. 2.

4. Провести переобозначение классов внутренних состояний и записать таблицу автомата без выхода в стандартном виде.

5. Взять по одному слову из события α и *не* α, проверить представление автоматом этих слов.

Таблица 6.4.4

№	α
1	$(bc \cup a^*b)(b^* \cup ca)^*(a \cup bc)$
2	$(a \cup b^*c)(c \cup ba^*)^*(c \cup ca)$
3	$(ca \cup b^*)(ab \cup bc)^*(b \cup ac^*)$
4	$(ab \cup c^*)(b \cup ac)^*(a \cup b)$
5	$(bc \cup a^*)(b \cup a^*c)^*(a \cup c)$
6	$(ac \cup b^*)(ab \cup bc^*)(a \cup b)^*$
7	$(ba \cup c^*b)(a^* \cup bc)^*(b \cup ac)$
8	$(a^* \cup bc)(b \cup c^*a)^*(a \cup bc)$
9	$(b^* \cup a)^*(ab \cup c^*a)(b \cup c)$
10	$(b \cup c^*a)(a \cup bc)^*(b^* \cup c)$
11	$(bc \cup a^*)(a \cup bc)^*(b^* \cup ac)$
12	$(a \cup cb^*)(a \cup bb)^*(c \cup ab)$
13	$(bb \cup c^*)(ac \cup b^*)^*(a \cup b)$
14	$(a^* \cup ba)(ac \cup b^*)^*(c \cup ab)$
15	$(ab \cup c^*)(a \cup bc^*)^*(b \cup bb)$

16	$(a\cup b^*)(ac^*\cup b)^*(bb\cup a)$
17	$(b\cup a^*c)(bc\cup a)^*(cc\cup b)$
18	$(ac\cup b^*)(bb\cup c^*)^*(ac\cup b)$
19	$(a\cup c^*)^*(bc\cup a^*)(b\cup a)$

Таблица 6.4.4(окончание)

№	α
20	$(aa\cup b^*)(ac\cup b)^*(ac\cup a^*)$
21	$(bc^*\cup a)(cc\cup b)^*(b\cup ac)$
22	$(c^*\cup bc)(b\cup aa)^*(a\cup b)$
23	$(ab\cup c^*)^*(bc\cup a)(c\cup bb)$
24	$(b\cup ac^*)(b\cup aa)^*(c\cup b)$
25	$(b^*\cup ca)(c\cup ba^*)^*(b\cup a^*a)$
26	$(a^*c\cup b)(bc^*\cup b)^*(aa\cup bc^*)$
27	$(cb\cup b)^*(a\cup bc^*)(ac\cup a)^*$
28	$(c^*a\cup b)(b\cup ba)^*(a\cup cb)$
29	$(b\cup a^*c)(b^*c\cup a)^*(cb\cup ab^*)$
30	$(b^*a\cup b)(b\cup ca)^*(a\cup b)$

Пример решения задания 6.4.4

Решим задание 6.4.4 для события $\alpha=(b^*\cup cb)(ba\cup c^*)^*(a\cup bc)$.

1. Изобразим источник, учитывая, что конкатенации слов соответствует последовательное соединение источников, представляющих данные слова, объединению – параллельное соединение, а итерации – зацикливание, так, чтобы каждому слову из события α соответствовал бы маршрут из начальной вершины источника в заключительную. Получим:

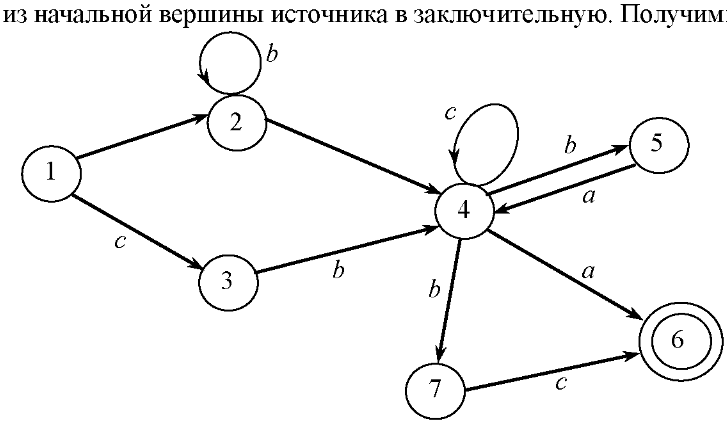


Рис. 6.4.4

2. Строим таблицу полученного недетерминированного автомата. В клетке, соответствующей состоянию q_i и символу входного алфавита u, будем писать список вершин, в которые можно попасть из вершины q_i, считав по пути символ u. Так, например, из вершины 2, считав по пути символ b, можно попасть в вершины 2,4,5 и 7. Получим таблицу переходов недетерминированного автомата (табл. 6.4.4а):

Таблица 6.4.4а

$A \backslash Q$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
a	6	6	$\varnothing$	6	4	$\varnothing$	$\varnothing$
b	2,4,5,7	2,4,5,7	4	5,7	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
c	3,4	4	$\varnothing$	4	$\varnothing$	$\varnothing$	6

3. Строим вспомогательную таблицу следующим образом: в заголовке первого столбца выпишем номер начальной вершины (в нашем случае это - 1), а также номера всех вершин, в которые можно попасть из начальной вершины по пустым рёбрам (в нашем случае - это вершины 2 и 4). Заголовки строк, как и в предыдущей таблице, помечаем символами входного алфавита a, b, c. Далее, в клетку, соответствующую входному сигналу u и списку состояний 1, 2, 4 запишем объединение содержимого клеток, находящихся на пересечении строки, помеченной символом u и находящихся на пересечении строки, помеченной символом u и столбцов 1, 2 и 4. Получим (табл. 6.4.4.b):

Таблица 6.4.4b

	1,2,4
a	6
b	2,4,5,7
c	3,4

Затем дополним таблицу тремя столбцами, пометив их полученными списками. В нашем случае - это 6; 2,4,5,7 и 3,4. Новые образовавшиеся клетки заполним по тому же правилу, по которому

Таблица 6.4.4b

	1,2,4	6	2,4,5,7	3,4
a	6	$\varnothing$	4,6	6
b	2,4,5,7	$\varnothing$	2,4,5,7	4,5,7
c	3,4	$\varnothing$	4,6	4

мы заполняли клетки первого столбца.

Получим (табл.6.4.4.b):

Продолжим построение таблицы до тех пор, пока будем получать новые столбцы. В итоге имеем (табл.6.4.4c):

Таблица 6.4.4c

	1,2,4	6	2,4,5,7	3,4	∅	4,6	4,5,7	4	5,7
a	6	∅	4,6	6	∅	6	4,6	6	4
b	2,4,5,7	∅	2,4,5,7	4,5,7	∅	5,7	5,7	5,7	∅
c	3,4	∅	4,6	4	∅	4	4,6	4	6

На основе полученной таблицы строим детерминированный автомат без выхода, с алфавитом $\{a,b,c\}$, в котором состояния будут соответствовать спискам, проставленным в заголовках столбцов в построенной таблице, начальному состоянию будет соответствовать список, которым помечен первый столбец, а заключительным состояниям будут соответствовать списки, в которые вошла заключительная вершина источника (вершина 6 в нашем случае). Проведём переобозначение: 1,2,4 - 1'; 6 - 2'; 2,4,5,7 - 3'; 3,4 - 4'; ∅ - 5'; 4,6 - 6'; 4,5,7 - 7'; 4 - 8'; 5,7 - 9'.

Перепишем таблицу, заменив списки номерами 1', 2',…, 9'.

Получим (табл.6.4.4d):

Таблица 6.4.4d

$A \backslash Q$	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
a	2'	5'	2'	2'	5'	2'	6'	2'	8'
b	3'	5'	3'	7'	5'	9'	9'	9'	5'
c	4'	5'	6'	8'	5'	8'	6'	8'	2'

Проверим работу построенного детерминированного автомата без выхода с начальным состоянием 1' и заключительными состояниями 2' и 6' над словом *cbbacccbc* , вошедшим в событие α:

	c	*b*	*b*	*a*	*c*	*c*	*c*	*b*	*c*
1'	4'	7'	9'	8'	8'	8'	8'	9'	2'

Как мы видим, в результате работы над словом, вошедшим в событие α, произошёл переход в состояние 2', являющееся заключительным для нашего автомата.

Возьмём слово, не попавшее в α, например, $abbbac$, проверим работу над ним построенного автомата без выхода:

	a	*b*	*b*	*b*	*a*	*c*
1'	2'	5'	5'	5'	5'	5'

Как мы видим, в результате работы над словом, не вошедшим в событие α, произошёл переход в состояние 5', не являющееся заключительным для нашего автомата, что и следовало ожидать.

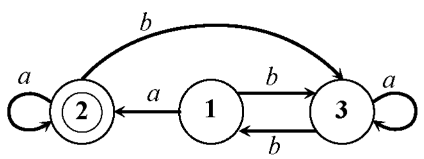
Задание 6.4.5

1. Пользуясь алгоритмом Макнотона-Ямады, провести анализ конечного автомата, заданного диаграммой переходов. Начальное состояние - 1.

2. Убедиться для некоторого маршрута из начальной в конечную вершину соответствующего детерминированного источника, что слово *a*, связанное с этим маршрутом, принадлежит построенному событию.

Для произвольного слова из построенного события указать маршрут из начальной в конечную вершину.

Таблица 6.4.5

№	автомат
1	

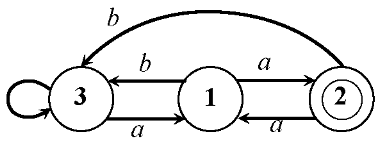
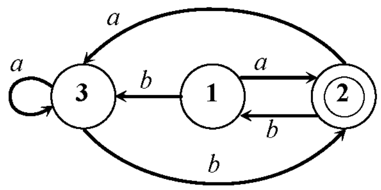
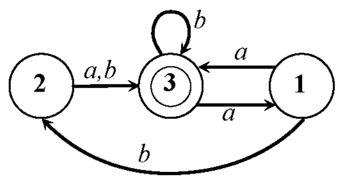
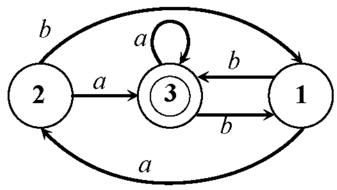
2	

Таблица 6.4.5(продолжение)

№	автомат
3	
4	
5	

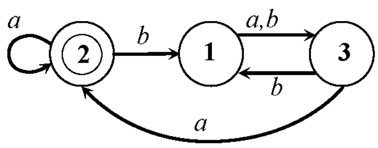
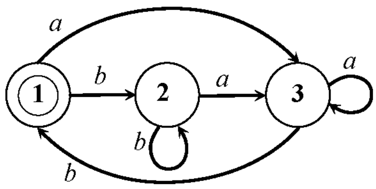
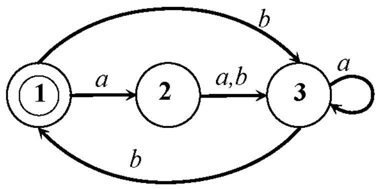
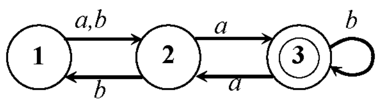
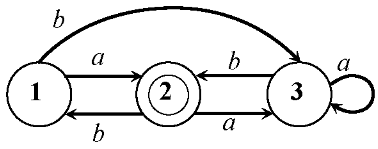
6	
7	

Таблица 6.4.5(продолжение)

№	автомат
8	
9	
10	

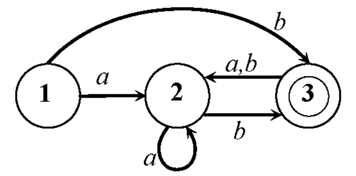
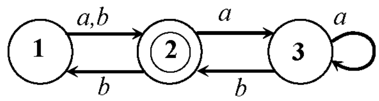
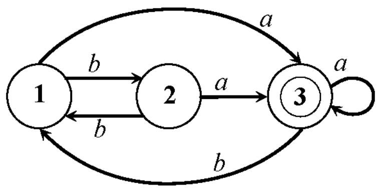
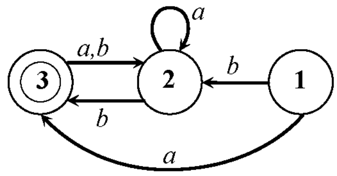
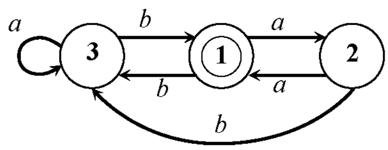
11	
12	

Таблица 6.4.5(продолжение)

№	автомат
13	
14	
15	

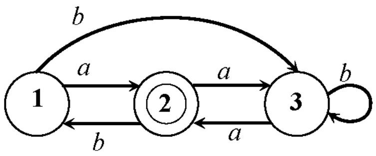
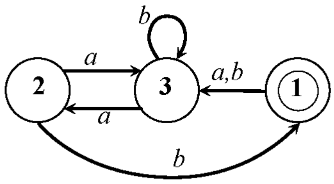
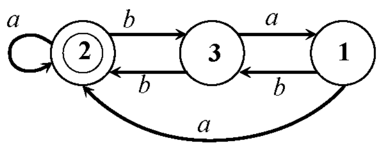
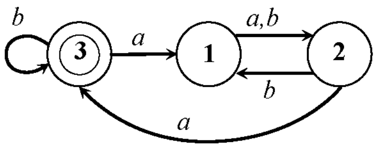
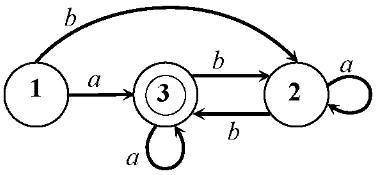
16	
17	

Таблица 6.4.5(продолжение)

№	автомат
18	
19	
20	

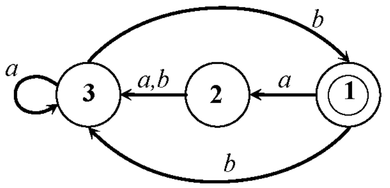
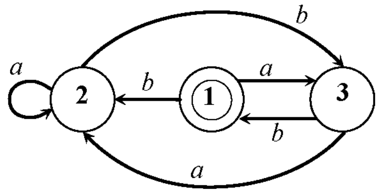
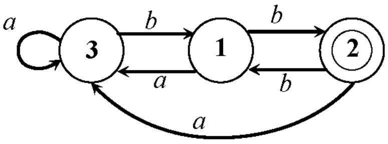
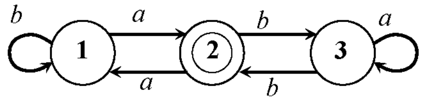
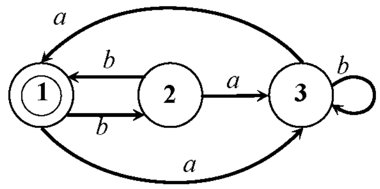
21	
22	

Таблица 6.4.5(продолжение)

№	автомат
23	
24	
25	

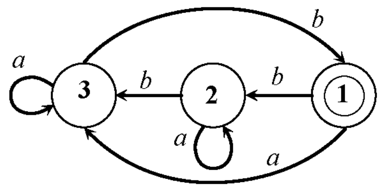
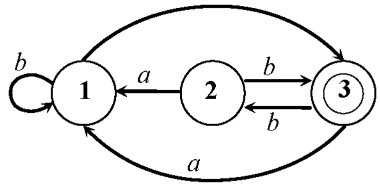
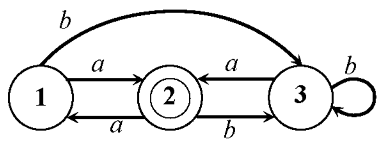
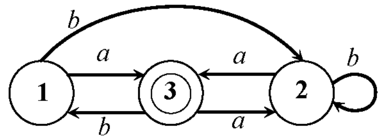
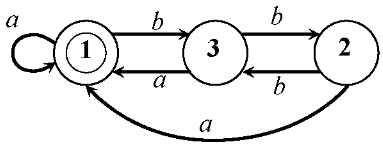
26	
27	

Таблица 6.4.5(окончание)

№	автомат
28	
29	
30	

Пример решения задания 6.4.5

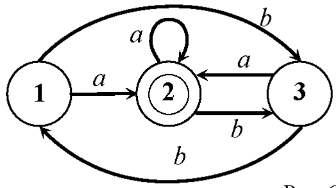


Рис. 6.4.5

Рассмотрим множества: $E_{ij}^{0} = \{a \mid \delta(a, q_1) = q_j\}$ **(1)**

$$E_{ij}^{k} = E_{ij}^{k-1} \cup E_{ik}^{k-1}(E_{kk}^{k-1})^{*} E_{kj}^{k-1}, \quad k > 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Согласно теореме Макнотона-Ямады, числа E_{ij}^{k} образуют слова, соответствующие маршрутам из i - той вершины в j - ю вершину, причём в этих маршрутах номера вершин, проходимых внутри маршрута, не превосходят k.

В нашем случае начальная вершина – 1, заключительная – 2, общее количество вершин равно 3, значит, данный автомат представляет событие E_{12}^{3}.

Найдём события по формулам (1):

$E_{11}^{0} = e;$ $E_{12}^{0} = a;$ $E_{13}^{0} = b;$ $E_{21}^{0} = \varnothing;$ $E_{22}^{0} = a;$ $E_{23}^{0} = b;$
$E_{31}^{0} = b;$ $E_{32}^{0} = a;$ $E_{33}^{0} = e,$

где e - пустое слово (не путать с пустым событием $\varnothing$).

События найдём по формуле (2):

$$E_{11}^{1} = E_{11}^{0} \cup E_{11}^{0}(E_{11}^{0})^{*} E_{11}^{0} = e \cup ee*e = e;$$

$$E_{12}^{1} = E_{12}^{0} \cup E_{11}^{0}(E_{11}^{0})^{*} E_{12}^{0} = a \cup ee*a = a \cup a = a;$$

$$E_{13}^{1} = E_{13}^{0} \cup E_{11}^{0}(E_{11}^{0})^{*} E_{13}^{0} = b \cup ee*b = b \cup b = b;$$

$$E_{21}^{1} = E_{21}^{0} \cup E_{21}^{0}(E_{11}^{0})^{*} E_{11}^{0} = \varnothing \cup \varnothing e*e = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing;$$

$$E_{22}^{1} = E_{22}^{0} \cup E_{21}^{0}(E_{11}^{0})^{*} E_{12}^{0} = a \cup \varnothing e*a = a \cup \varnothing = a;$$

$$E_{23}^1 = E_{23}^0 \cup E_{21}^0 (E_{11}^0)^* E_{13}^0 = b \cup \varnothing e * b = b \cup \varnothing = b;$$
$$E_{31}^1 = E_{31}^0 \cup E_{31}^0 (E_{11}^0)^* E_{11}^0 = b \cup be * e = b \cup b = b;$$
$$E_{32}^1 = E_{32}^0 \cup E_{31}^0 (E_{11}^0)^* E_{12}^0 = a \cup be * a = a \cup b;$$
$$E_{32}^1 = E_{33}^0 \cup E_{31}^0 (E_{11}^0)^* E_{13}^0 = e \cup be * b = e \cup bb.$$

Выразим E_{12}^3, посмотрим, какие события, помеченные верхним индексом 2, нам надо найти: $E_{12}^3 = E_{12}^2 \cup E_{13}^2 (E_{33}^2)^* E_{32}^2$.

Найдём каждое из событий, присутствующих в правой части последнего равенства:

$$E_{12}^2 = E_{12}^1 \cup E_{12}^1 (E_{22}^1)^* E_{22}^1 = a \cup aa * a;$$
$$E_{13}^2 = E_{13}^1 \cup E_{12}^1 (E_{22}^1)^* E_{23}^1 = b \cup aa * b;$$
$$E_{33}^2 = E_{33}^1 \cup E_{32}^1 (E_{22}^1)^* E_{23}^1 = e \cup bb \cup (a \cup ba) a * b;$$
$$E_{32}^2 = E_{32}^1 \cup E_{32}^1 (E_{22}^1)^* E_{22}^1 = (a \cup ba) \cup (a \cup ba) a * a.$$

Итак, получаем регулярное выражение:

$$E_{12}^3 = E_{12}^2 \cup E_{13}^2 (E_{33}^2)^* E_{32}^2 =$$
$$= a \cup aa * a \cup (b \cup aa * b)(e \cup bb \cup (a \cup ba) a * b) * (a \cup ba \cup (a \cup ba) a * a).$$

2. Рассмотрим какой-нибудь маршрут из первой вершины во вторую, например: $1 \to 2 \to 2 \to 3 \to 2$. Этому маршруту соответствует слово $aaba$. Проверим, присутствует ли оно в событии E_{12}^3.

Если в событии E_{12}^3 взять слово aab, в $(E_{33}^2)^*$ взять e, а в E_{32}^2 слово a, то конкатенация этих слов, вошедшая в E_{12}^3, и будет равна $aaba$.

3. Возьмём какое-нибудь слово из события, например, $bbbbaa$.

Рассмотрим маршрут, соответствующий этому слову:

$$1 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{a} 2.$$

Действительно, при считывании слова $bbbbaa$, начав движение из 1 вершины, мы оказались во 2, заключительной, вершине.

Список литературы

2. Виленкин Н.Я. , Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. – М.:ФИМА, МЦНМО, 2006.

3. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
4. Ерусалимский Я.М., Дискретная математика: Теория, задачи, приложения. – М.: Вузовская книга, 2005.
5. Капитонова Ю.В., Кривой С.Л., Летичевский А.А., Луцкий Г.М. Лекции по дискретной математике. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
6. Карпов В.Г., Мощенский В.А. Математическая логика и лискретная математика. – Минск: Вышэйшая школа, 1977.
7. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. – М.: Энергоатомиздат, 1988.
8. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: Наука, 1984.
9. Мощенский В.А. Лекции по математической логике. –Минск, Изд-во Белорус. университета, 1973.
10. Нефёдов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. – Изд-во МАИ, 1992.
11. Новиков Ф,А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2004.
12. Шиханович Ю.А. Введение в современную математику. – М.: Наука, 1965.
13. Шоломов Л.А. Основы теории дискретных логических и вычислительных устройств. – М.:Наука, 1980.